FOLOSIREA DEPLASĂRILOR ELASTICE ÎN CALCULUL CADRELOR

de Inginer ALEXANDRU GHEORGHIU
Conferenţiar la Politechnica din Bucureşti

I. OBIECTUL LUCRĂRII

Desvoltarea deosebită, luată în ultimele decenii de calculul construcţiunilor static nedeterminate, a condus la apariţia a numeroase metode şi perfecţionări, ce permit rezolvarea, în condiţiuni cât mai bune şi pe căi cât mai simple, a problemelor specifice acestui gen de construcţiuni. Literatura technică străină prezintă numeroase studii în această direcţiune, oferind calculatorului posibilitatea de a alege în diversitatea de metode ce-i stau la dispoziţie, pe aceia ce apare mai indicată în cazul ce-l interesează, atât din punctul de vedere al alegerii necunoscutelor iperstatice şi a punerii în ecuaţie a problemei, cât şi din punctul de vedere al rezolvării sistemului de ecuaţii obţinut.

Literatura technică românească, deşi puţin numeroasă în acest domeniu, şi-a adus contribuţia sa prin atât de eleganta metodă a *coeficienţilor nedeterminaţi*, datorită regretatului Profesor *Gh. Em. Filipescu*.

In tot acest ansamblu de metode şi perfecţionări de calcul, ce îmbrăţişează sub toate aspectele rezolvarea sistemelor static nedeterminate, este necesară o vedere clară a lucrurilor şi o orientare sigură asupra elementelor caracteristice, spre a avea un fir conducător în varietatea aspectelor ce prezintă diferitele metode. Tocmai în aceasta constă principala dificultate, ce o întâlnesc acei ce se găsesc la începutul studiului sistemelor static nedeterminate. Aspectul oarecum abstract ce acest domeniu prezintă, cel puţin la prima vedere, cât şi calculul destul de complicat ce rezultă din aplicarea curentă a metodei clasice, face ca, pentru începători, sistemele iperstatice să nu constitue o atracţie deosebită, astfel că în multe cazuri existenţa cărţilor cu formule gata calculate pentru cadre de forme curente, sau impresia de elementare operaţii aritmetice la care s'ar reduce aplicarea metodei *Cross*, face ca acestea să fie considerate drept soluţiuni salvatoare, ce ar permite

renunțarea de a aprofunda toate aspectele de studiu ale sistemelor static nedeterminate, reducând totul la un calcul mai mult sau mai puțin mecanizat.

Desigur, asemenea păreri nu sunt tocmai fericite, ele putând conduce la formarea de calculatori, ce nu înțeleg decât în redusă măsură materialul ce mânuesc; credem că, pentru toți acei ce vor să facă primii pași în studiul sistemelor iperstatice, este necesară în primul rând cunoașterea și înțelegerea clară a punctelor de plecare în acest domeniu, cât și a formelor de calcul celor mai sugestive, putând prin aceasta să-și formeze o bază sigură pentru cercetarea literaturii, oprindu-se la metodele ce li se par mai atrăgătoare. Bineînțeles că, pentru aceasta, e necesar ca primele orientări de calcul ce întâlnesc, să fie desbrăcate cât mai mult posibil de aspectul abstract și să conducă la forme cât mai simple de exprimare și rezolvare.

Călăuziți de această idee, ne-am propus să încercăm ca, plecând dela linia clasică a studiului sistemelor static nedeterminate, să căutăm a da calculului cadrelor o organizare de așa manieră, încât să se realizeze, într'o măsură cât mai mare, două cerințe:

a) O imagine clară a diferitelor elemente ce intervin, căutând semnificări sugestive pentru acestea, dând posibilitate cititorului de a *vedea* mersul calculului; am utilizat în acest scop *deformațiile*, sub forma lor cea mai simplă, anume rotirile ce s'ar produce între cele două fețe ale unei secțiuni pe o bară, atunci când s'ar introduce acolo o *articulație*, bara deformându-se sub acțiunea a diferite moduri de încărcare;

b) O linie de calcul cât mai simplă, care pentru cadrele cu bare drepte, să elimine complet toate integrările ce apar în metoda clasică, reducând scrierea ecuațiilor de echilibru elastic la o simplă examinare de diagrame, ce vorbesc ochiului cu multă ușurință. Am ajuns aici utilizând, în toate cazurile, *un sistem static determinat de bază*, cu diagramele sale de momente încovoetoare pentru solicitări foarte simple, ce se pot schița imediat.

Pornită în această direcție, organizarea de calcul ce ne-am propus a realiza, a condus la rezultate destul de interesante, permițând rezolvarea cadrelor cu ușurință, totul reducându-se la câteva diagrame cât se poate de elementare, de pe care se obțin prin *citire directă* ecuațiile de echilibru elastic ale construcțiunii considerate; totodată, acest sistem de ecuații are o structură convenabilă pentru rezolvare, putându-se în toate cazurile reduce chestiunea, prin eliminarea unora din necunoscute, la grupe de ecuații în număr foarte mic. Se va putea vedea în exemplele tratate că, pentru cadre de șase—șapte ori static nedeterminate, a fost necesară rezolvarea unui sistem de cel mult trei ecuații lineare cu trei necunoscute, ceiace desigur este un avantaj apreciabil.

Remarcăm că, din punctul de vedere al organizării de calcul admise, nu este nici o deosebire principială între cadrele cu noduri fixe și cele cu noduri deplasabile, toate putând fi tratate în acelaș mod, dat fiind că deplasările orizontale ale nodurilor nu apar direct în calculul ce facem,

influenţa lor manifestându-se printr'o oarecare amplificare a diagramelor de momente ce se utilizează, având de rezultat o structură ceva mai greoaie a sistemului de ecuaţii, care face necesară o operaţie suplimentară — totdeauna posibilă şi vizibilă pe diagrame — a combinării ecuaţiilor, pentru obţinerea unui sistem uşor de rezolvat.

Căutând să eliminăm această dificultate, am găsit posibilitatea ca, prin introducerea unui număr foarte restrâns de necunoscute auxiliare, însoţite de un număr corespunzător de relaţii de condiţie, să se ajungă direct la sisteme de ecuaţii, cu structură tot atât de simplă ca în cazul cadrelor cu noduri fixe. Mai mult încă, punând într'un anumit mod în evidenţă deplasările orizontale ale nodurilor, se ajunge la rezultatul că, odată terminat calculul, se obţin în paralel şi valorile necunoscutelor pentru ipoteza aproximativă a nodurilor fixe, ceia ce permite să se tragă concluzii comparative asupra întinderii acestei aproximaţii. La cadre etajate se obţin direct, fără niciun calcul suplimentar, atât valorile exacte ale necunoscutelor pentru cadrul cu noduri deplasabile, cât şi valorile aceloraşi necunoscute pentru diferite ipoteze aproximative, considerând fixitatea tuturor etajelor sau numai a unora din ele. Totodată, aceste ipoteze aproximative se pot aplica chiar dela începutul calculului, după voinţă, totul reducându-se la anularea unor termeni ai ecuaţiilor, obţinându-se evident prin aceasta simplificări în rezolvare.

Această formă a organizării de calcul ce propunem, în cazul cadrelor cu noduri deplasabile, capătă o oarecare apropiere de metoda *coeficienţilor nedeterminaţi* a *Prof. Gh. Em. Filipescu*, având însă un număr mult mai redus de necunoscute suplimentare, nefigurând aici ecuaţiile de echilibru ale nodurilor, cu necunoscutele corespunzătoare.

In paginele ce urmează, vom căuta în primul rând să încadrăm chestiunea cu câteva din punctele de plecare ale calculului sistemelor static nedeterminate, ca ideile să fie cât mai bine fixate pentru cititorii ce vor să se orienteze în acest domeniu, acestora fiindu-le destinată în special prezenta lucrare; totodată, vom prefera să scoatem în evidenţă caracteristicele calculului direct din aplicarea pe exemple, pentru o mai uşoară urmărire şi identificare a acestora. S'au tratat complet câteva cazuri de cadre cu un grad mijlociu de nedeterminare, spre a se putea vedea lămurit drumul destul de simplu şi rapid ce duce la rezultat, rămânând ca cititorul să aprecieze dacă organizarea de calcul propusă corespunde sau nu preferinţelor sale.

II. STABILIREA ECUAŢIILOR DE ECHILIBRU ELASTIC

Sistemele static nedeterminate sunt caracterizate de faptul că ecuaţiile universale de echilibru static nu sunt suficiente pentru a determina, în toate secţiunile, efectele rezultante ale solicitărilor exterioare (momente încovoetoare şi de torsiune, forţe axiale şi tăetoare). Totalul necunoscutelor (rezemări şi legături interioare ale sistemului) depăşeşte numărul acestor ecuaţii, astfel că e necesar să se ţină seama şi de *echilibrul elastic*, ce se stabileşte atunci când desvoltările de rezistenţe în

toate punctele materialului echilibrează solicitările exterioare, în starea deformată a construcțiunii. Numărul necesar de ecuații de echilibru elastic va fi egal cu surplusul de necunoscute, ce depășește numărul ecuațiilor de echilibru static, deci cu gradul de nedeterminare al construcțiunii.

Inventariind toate necunoscutele problemei, le putem împărți în două grupe:

— în prima un număr de necunoscute egal cu acela al ecuațiilor de echilibru static disponibile;

— în a doua surplusul, acestea fiind necunoscutele iperstatice.

Evident împărțirea poate fi făcută oricum, cu condiția de a preciza dela început componența grupelor.

Aplicând ecuațiile de echilibru static, vom putea exprima întotdeauna necunoscutele din prima grupă în funcțiune de celelalte, astfel că, de fapt, chestiunea se rezumă la aflarea necunoscutelor iperstatice, acesta fiind scopul calculului sistemelor static nedeterminate, utilizând pentru aceasta ecuațiile de echilibru elastic.

Presupunând că am elimina necunoscutele din a doua grupă, suprimând deci rezemările și legăturile interioare corespunzătoare, se obține *un sistem static determinat*, caracterizat prin necunoscutele din prima grupă, rezolvarea putându-se face cu ecuațiile de echilibru static.

Aplicând acum, asupra acestui sistem static determinat, niște *solicitări exterioare* egale cu necunoscutele suprimate, se obține un sistem echivalent celui static nedeterminat inițial, ambele fiind caracterizate prin aceiași stare deformată.

Calcularea valorilor acestor necunoscute se va face deci tocmai punând condițiunea ca sistemul static determinat de bază, sub acțiunea sarcinilor exterioare și a necunoscutelor iperstatice, să se deformeze identic cu construcțiunea static nedeterminată, respectând rezemările și legăturile interioare ale acesteia.

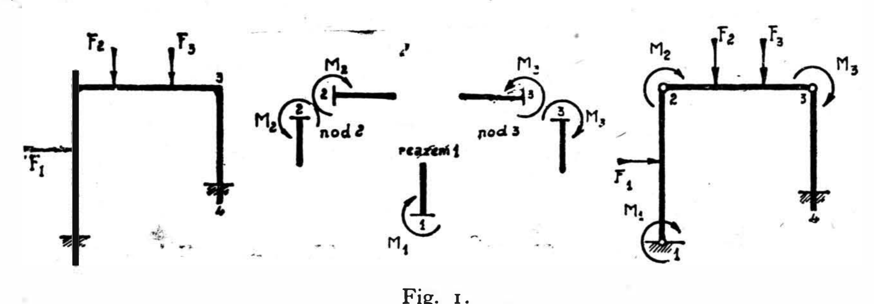


Fig. 1.

Un exemplu va clarifica lucrurile: un cadru încastrat în *1* și *4*, supus la încărcări exterioare oarecare (fig. 1). Necunoscutele sunt în număr de șase, corespunzătoare — de exemplu — reacțiunilor din cele două încastrări, cunoașterea acestora permițând calcularea în orice secțiune a momentelor încovoetoare, etc.

Sistemul e deci triplu static nedeterminat, ecuațiile de echilibru static în plan fiind în număr de trei.

Vom avea trei necunoscute iperstatice, deci pentru a obține sistemul static determinat de bază vor trebui suprimate trei legături — în rezemări sau în interiorul sistemului — după voință. *In toate cele ce urmează vom prefera totdeauna, pentru a da o linie unitară organizării de calcul, introducerea de articulații.* Vom introduce deci trei articulații în trei puncte oarecare ale construcțiunii; e preferabil ca aceasta să se facă în rezemări sau în noduri, pentru simplificarea calculului.

Alegând de exemplu punctele: *1*, *2*, *3* și introducând articulații, obținem sistemul static determinat; pentru restabilirea situației, vom aplica momentele M_1, M_2 și M_3 ca solicitări exterioare, ele acționând pe cele două fețe ale fiecăreia din secțiunile unde s'au întrodus articulațiile, așa cum se vede în fig. 1. Valorile necunoscutelor vor fi determinate prin condițiunea ca, după deformație, sistemul static determinat să respecte caracteristicele sistemului inițial în punctele unde s'au suprimat legăturile, deci tangenta la fibra medie deformată în *1* să rămână verticală, iar cele două perechi de tangente din nodurile *2* resp. *3* să formeze unghiuri drepte.

Aceste condițiuni conduc la scrierea ecuațiilor de echilibru elastic. Oricare ar fi punctul de plecare pentru stabilirea ecuațiilor, ele exprimă totdeauna relațiuni între deformații; este deci cât se poate de indicat ca aceste deplasări elastice să apară cât mai clar în structura ecuațiilor, fiind modul cel mai sugestiv de exprimare.

* * *

Mai înainte de a se arăta forma sub care pot fi puse ecuațiile de echilibru elastic, este necesar de precizat cadrul în care se situiază desvoltările de calcul ale acestui aspect al echilibrului, dat fiind că aici este prezent materialul din care e făcută construcțiunea, cu toate caracteristicele sale. Vom admite dela început că solicitările exterioare, natura materialului și dimensiunile cadrului vor fi totdeauna astfel, încât să ne aflăm în *zona elastică* a materialului, deci rezistențele interioare rămânând mereu inferioare celor două limite caracteristice acestei zone: limita elastică și cea de proporționalitate, de altfel foarte apropiate între ele. In această zonă materialul se bucură de două proprietăți, ce se pot, cu suficientă aproximație, defini astfel:

— proporționalitate între solicitările exterioare, rezistențele interioare și deformațiuni, legătura între ele putând fi exprimată prin relații lineare;

— comportare perfect elastică a materialului, deformațiile urmând în totul variațiile solicitărilor exterioare.

Aceasta ne permite de a putea aplica în toată siguranța *principiul suprapunerii efectelor.* In adevăr, regimul perfect elastic al materialului face ca atât rezistențele interioare, cât și deformațiile, să fie strâns legate de intensitatea și durata de acționare a solicitărilor exterioare. Aceste efecte apar odată cu intervenția solicitării și dispar concomitent cu înlăturarea ei, fiind legate de solicitare prin legea proporțio-

nalității. O variație în intensitatea solicitării aduce fatal o variație proporțională a efectelor. Supunând o construcțiune, în acelaș timp, la mai multe solicitări exterioare, efectele totale nu vor fi altceva decât sumarea efectelor parțiale, corespunzătoare fiecărei solicitări. Exprimarea acestor efecte se va putea face totdeauna prin relațiuni lineare, în funcție de *mărimea solicitărilor* și *coeficienții de influență*, reprezentând efectele parțiale ale fiecărei solicitări în parte, considerată cu o intensitate egală cu unitatea.

S'ar putea spune chiar că principiul suprapunerii efectelor nu este altceva decât exprimarea sub o formă generală a caracteristicelor zonei elastice, putându-se enunța astfel: o suprapunere de stări elastice diferite conduce la suprapunerea deformațiilor corespunzătoare fiecăreia din stările elastice considerate.

Aceste lucruri e bine să fie precizate, dat fiind că vom face o întinsă aplicare a lor în cele ce vor urma.

* * *

Ne vom ocupa acum de chestiunea stabilirii gradului de nedeterminare al unei construcțiuni, spre a avea o normă sigură de aflare a numărului de articulații ce trebuesc introduse pentru obținerea sistemului static determinat de bază.

Modul cel mai simplu e următorul[1]): să considerăm o construcție formată din bare, supusă la un sistem oarecare de încărcări exterioare — totul fiind cuprins într'un acelaș plan — și să evaluăm numărul necunoscutelor. Ne ocupăm în primul rând de fiecare bară în parte, examinându-i condițiile de rezemare la capete față de restul construcțiunii; ținând seama că o încastrare reprezintă trei necunoscute, o articulație două necunoscute și un reazem simplu una singură, se pot prezenta următoarele cazuri:

— bare cu încastrări la ambele capete: 6 necunoscute;

— bare cu o încastrare la un capăt și articulație la celălalt: 5 necunoscute;

— bare cu încastrare la un capăt și reazem simplu la celălalt, sau bare cu articulații la ambele capete: 4 necunoscute.

Pe această bază, putem evalua numărul total de necunoscute corespunzătoare tuturor barelor construcțiunii: să notăm acest număr cu n_b.

Inafară de acestea, mai sunt necunoscute reacțiunile din reazeme, care pot fi încastrări, articulații sau reazeme simple; inventariindu-le, vom obține un al doilea grup de necunoscute n_r.

In total vor fi deci: $n_b + n_r = n_t$ necunoscute.

Să examinăm acum relațiile de echilibru static disponibile.

Pentru fiecare bară în parte se vor putea scrie trei asemenea ecuații, corespunzătoare echilibrului în plan; aplicându-le tuturor barelor construcțiunii, vom obține un prim număr de ecuații e_b.

---

1) Gh. Em. Filipescu: Statica și Rezistența.

Inafară de acestea, se mai pot scrie ecuaţiile de echilibru ale nodurilor şi rezemărilor. Pentru acestea se pot prezenta următoarele cazuri:

— noduri în care cel puţin două bare sunt încastrate între ele, sau reazeme formate din o încastrare: 3 ecuaţii;

— noduri în care avem numai bare articulate şi simplu rezemate, sau reazeme formate din o articulaţie: 2 ecuaţii;

— reazeme simple: o ecuaţie.

Pentru toate nodurile şi rezemările construcţiunii se vor putea scrie un număr de e_n ecuaţii de echilibru static, la care adăugând pe cele corespunzătoare barelor, se va obţine un total de: $e_b + e_n = e_t$ ecuaţii.

Diferenţa $d = n_t - e_t$ va caracteriza construcţiunea din punctul de vedere al nedeterminării statice:

când $d < 0$ sistemul nu este în echilibru,

când $d = 0$ este vorba de un sistem static determinat,

când $d > 0$ sistemul e static nedeterminat, d reprezentând gradul de nedeterminare, deci numărul de articulaţii ce vor trebui introduse pentru a obţine sistemul static determinat de bază.

Este necesar de remarcat că relaţia $d = 0$, care reprezintă condiţia minimă de echilibru, trebue să fie îndeplinită atât de întreaga construcţiune, cât şi de diferitele ei părţi componente; se va verifica întotdeauna aceasta, evitându-se astfel scheme de construcţiuni care, deşi static nedeterminate în unele părţi, să nu fie în echilibru în altele.

Totodată, această condiţie minimă de echilibru este foarte utilă *după introducerea articulaţiilor*, în vederea obţinerii sistemului static determinat de bază, permiţând să se constate dacă distribuţia acestora a fost făcută judicios; condiţia $d = 0$ trebue să fie îndeplinită, în această fază, atât de întreaga construcţie, cât şi de toate părţile ei, cazul contrar indicând că, prin introducerea articulaţiilor, unele părţi au rămas static nedeterminate, în timp ce altele nu mai sunt în echilibru.

Exemplificând aplicarea normelor de mai sus, să ne referim la cadrul din fig. 2, care are un total de 10 bare, capătul inferior al barei *4—5* fiind articulat de etajul de jos, iar rezemările două articulaţii în *1* şi *9*, o încastrare în *6*:

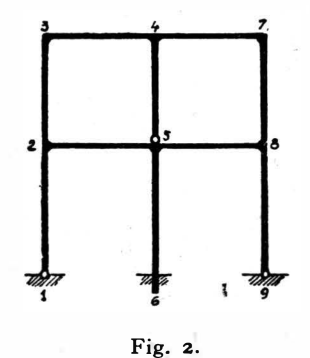


Fig. 2.

— Necunoscute:

7 bare a 6 necunoscute . . .	42
3 bare a 5 » . . .	15
2 reazeme articulate a 2 nec..	4
1 reazem incastrat a 3 nec. .	3
Total . . .	$64 = n_t$

— Ecuaţii de echilibru static:

10 bare a 3 ecuaţii	30
6 noduri a 3 ecuaţii	18
2 reazeme a 2 »	4
1 reazem a 3 »	3
Total . . .	$55 = e_t$

Diferența $d = m_t - e_t = 64 - 55 = 9$ arată că sistemul este de nouă ori static nedeterminat, deci vor trebui introduse 9 articulații, spre a obține sistemul static determinat de bază.

Procedând analog pentru fiecare etaj în parte, se ajunge la rezultatul că etajul superior este de 5 ori static nedeterminat, în timp ce etajul inferior este numai de 4 ori; aceasta înseamnă că din totalul de 9 articulații ce urmează a fi introduse, 5 vor trebui plasate în etajul superior și 4 în etajul inferior, obținându-se astfel un sistem static determinat, atât în ansamblul său, cât și în părțile componente.

* * *

Să trecem acum la stabilirea ecuațiilor de echilibru elastic, ce vor sta la baza organizării de calcul propuse.

Odată introdus numărul de articulațiuni corespunzător gradului de nedeterminare, construcțiunea se transformă în un sistem static determinat, asupra căruia se va urmări întregul calcul. Spre a păstra echivalența cu sistemul static nedeterminat inițial, construcțiunea static determinată va fi considerată supusă la următoarele solicitări exterioare:

— încărcările exterioare propriu zise;

— cantitățile static nedeterminate, anume câte un moment în fiecare din articulațiile introduse, acționând pe ambele fețe ale secțiunii respective; valorile acestor momente nu sunt cunoscute inițial, ele constituind necunoscutele problemei.

Sub acțiunea *tuturor* acestor solicitări, construcțiunea static determinată va trebui să se deformeze astfel, încât starea ei deformată să fie identică cu aceia a sistemului static nedeterminat inițial, respectând deci toate legăturile suprimate. Aceasta înseamnă că, în starea finală deformată a construcțiunii static determinate, în fiecare din articulațiile introduse, cele două fețe ale secțiunii respective trebue să rămână paralele, deci *rotirea lor una față de alta să fie nulă*. Condițiunea $\theta_i = 0$, scrisă pentru fiecare din articulații, va reprezenta ecuația de echilibru elastic corespunzătoare acelei articulațiuni.

Pe baza principiului suprapunerii efectelor, vom putea considera că, asupra sistemului static determinat de bază, aplicăm *succesiv* solicitările exterioare, atât încărcările propriu zise, cât și fiecare din cantitățile static nedeterminate (momentele $M_1, M_2 \ldots M_n$).

Sub acțiunea *fiecăreia* din acestea, în o articulație oarecare i, cele două fețe ale secțiunii respective capătă o rotire una față de alta, drept consecință a deformației sistemului static determinat. Pentru încărcările exterioare (statice), în secțiunea i se va produce o rotire θ_{is}; pentru una din cantitățile static nedeterminate (de exemplu momentul M_k din articulația k), se va produce în articulația i o rotire, evident proporțională cu valoarea acestui moment, deci de forma $M_k \cdot \theta_{ik}$, unde θ_{ik} este rotirea ce se produce în articulația i, atunci când în articulația k acționează un moment egal cu unitatea.

Considerând acum aplicate *concomitent* toate solicitările exterioare, rotirea *totală* în secţiunea i va fi egală cu suma algebrică a tuturor rotirilor parţiale, ea trebuind să fie totodată nulă, spre a respecta — în starea deformată a construcţiunii static determinate — incastrarea existentă în secţiunea i a sistemului static nedeterminat iniţial. Vom putea scrie deci:

$$(1) \qquad \theta_i = \theta_{i1}.M_1 + \theta_{i2}.M_2 + \ldots + \theta_{in}.M_n + \theta_{is} = 0$$

aceasta constituind ecuaţia de echilibru elastic corespunzătoare articulaţiei din secţiunea i.

Formând câte o relaţie asemănătoare pentru fiecare din articulaţiile introduse, se obţine un sistem de ecuaţii, egal cu numărul cantităţilor static nedeterminate, permiţând aflarea acestora.

Vom menţiona cu această ocazie că, ori de câte ori utilizăm notaţia cu *doi indici*, *primul* se va referi totdeauna la secţiunea unde se produce *efectul* (moment, rotire, etc.), în timp ce *al doilea* indice se va referi la secţiunea unde se aplică *solicitarea*. Acest mod de notare îl vom folosi pentru *coeficienţii de influenţă*, ei reprezentând efecte produse de solicitări egale cu unitatea. Astfel m_{xi} va însemna momentul ce se produce în secţiunea x, când în secţiunea i se aplică un moment egal cu o tonă-metru; în mod analog, θ_{ik} va însemna rotirea ce se produce între feţele secţiunii din articulaţia i, atunci când în k acţionează un moment egal cu unitatea.

Odată stabilită ecuaţia de echilibru elastic (1), rămâne să vedem cari sunt expresiunile cu ajutorul cărora se pot calcula rotirile de forma θ_{is} şi θ_{ik}. Vom utiliza pentru aceasta lucrul mecanic.

Se cunoaşte că, atunci când o construcţiune este supusă unui ansamblu de solicitări exterioare, aceasta porneşte dela o stare iniţială, ajungând datorită desvoltărilor de rezistenţe interioare, la o stare finală: poziţia deformată.

Cu această ocazie, solicitările exterioare — trebuind să urmărească construcţiunea în deformaţia sa — produc o cantitate de lucru mecanic, denumită *lucrul mecanic exterior* (L_e).

In acelaş timp, construcţiunea — forţată fiind să părăsească poziţia sa normală — acumulează o cantitate de lucru mecanic, sub formă de energie potenţială, care să-i permită să revină la forma iniţială, de îndată ce solicitările exterioare ar fi îndepărtate, *satisfăcându-şi astfel caracteristicele sale elastice;* acesta este *lucrul mecanic interior* (L_i).

Ţinând seama de *principiul conservării energiei* şi admiţând — aproximaţie de altfel cu totul neînsemnată în cazul construcţiilor ce ne interesează — că transformările sub altă formă a energiei (căldură, învingere de frecări în reazeme, etc.) sunt neglijabile, rezultă că lucrul mecanic desvoltat de solicitările exterioare, pentru a duce corpul din starea iniţială în cea deformată, trebue să se regăsească în interiorul acestuia sub formă de energie potenţială, capabilă să readucă construcţiunea la starea iniţială, de îndată ce ar înceta acţiunea solicitărilor exterioare.

Vom avea deci $L_e = L_i$.

Se ştie de asemenea că lucrul mecanic interior se poate exprima în funcţiune de momentele încovoetoare şi de răsucire, forţele axiale şi tăetoare. Dat fiind că din totalul de lucru mecanic acumulat de un cadru prin deformaţie, cota corespunzătoare forţelor axiale şi tăetoare este de ordinul de mărime 2—3% şi ţinând seama totodată că în construcţiunile ce ne interesează nu apar aproape niciodată momente de răsucire de valori apreciabile, se admite în mod unanim ca, *la calculul cantităţilor static nedeterminate*, să se ia în considerare numai lucrul mecanic datorit momentelor încovoetoare, a cărui expresie este de forma:

$$L = \frac{1}{2} \int M_x^2 \, dx/EI$$

integrala întinzându-se asupra tuturor barelor construcţiunii.

Să considerăm acum sistemul static determinat de bază, supus acţiunii încărcărilor exterioare şi cantităţilor static nedeterminate M_1, $M_2 \ldots M_n$. Momentul în o secţiune oarecare x va fi, ţinând seamă de principiul suprapunerii efectelor:

(2) $$M_x = M_{xs} + m_{x1} . M_1 + m_{x2} . M_2 + \ldots + m_{xn} . M_n$$

unde M_{xs} e momentul în secţiunea x a sistemului static determinat de bază, acţionat numai de încărcările exterioare, iar m_{x1}, $m_{x2} \ldots m_{xn}$, coeficienţii de influenţă reprezentând momentele ce se produc în secţiunea x, atunci când în articulaţiile *1*, *2*... *n* acţionează momente egale cu unitatea.

In cazul când ar acţiona numai cantitatea static nedeterminată M_i în articulaţia i, vom avea: $M_x = m_{xi} . M_i$.

Rotirea ce se produce între feţele secţiunii i, în acest caz de încărcare, este dată de teorema lui *Castigliano*, care spune: derivata parţială a lucrului mecanic interior, acumulat de un sistem prin deformaţie, în raport cu una din solicitări (forţă sau moment), este egală cu proiecţia deplasării corespunzătoare (săgeată sau rotire) pe direcţia solicitării considerate. Vom avea deci:

$$\theta_i = \theta_{ii} . M_i = \partial L / \partial M_i = \int M_x . \partial M_x / \partial M_i . d\omega$$

unde am notat $d\omega = dx/EI$, greutatea elastică la încovoere a elementului de bară dx. Ţinând seama că:

$$M_x = m_{xi} . M_i \qquad \text{şi} \qquad \partial M_x / \partial M_i = m_{xi}$$

rezultă:

$$\theta_i = \theta_{ii} . M_i = M_i \int m_{xi}^2 . d\omega$$

deci:

(3) $$\theta_{ii} = \int m_{xi}^2 . d\omega$$

Dacă se consideră acţionând simultan cantităţile static nedeterminate M_i şi M_k, momentul într'o secţiune x va fi de forma:

$$M_x = m_{xi} M_i + m_{xk} M_k$$

Rotirea ce se produce între feţele secţiunii din articulaţia i va fi:

$$\theta_i = \theta_{ii} . M_i + \theta_{ik} . M_k = \partial L / \partial M_i = \int M_x . \partial M_x / d M_i . d\omega$$

Ţinând seama de expresia lui M_x şi de $\partial M_x / \partial M_i = m_{xi}$ se obţine:

$$\theta_i = \theta_{ii} . M_i + \theta_{ik} . M_k = M_i \int m_{xi}^2 . d\omega + M_k \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega$$

Făcând acum $M_i = 0$, deci acţionând numai cantitatea static nedeterminată M_k, vom avea:

$$\theta_i = \theta_{ik} . M_k = M_k \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega$$

de unde

(4) $$\theta_{ik} = \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega$$

Relaţia (4) arată în mod clar şi confirmarea principiului reciprocităţii deplasărilor, deoarece:

$$\theta_{ik} = \theta_{ki} = \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega$$

ceia ce înseamnă că rotirea între feţele secţiunii din articulaţia i, atunci când acţionează numai momentul $M_k = 1$ tm. în articulaţia k, este egală cu rotirea între feţele secţiunii din articulaţia k, atunci când acţionează numai momentul $M_i = 1$ tm. în articulaţia i.

Considerăm acum construcţiunea solicitată de încărcările statice şi de cantitatea static nedeterminată M_i.

Momentul în o secţiune oarecare x va fi de forma:

$$M_x = M_{xs} + m_{xi} . M_i$$

unde M_{xs} reprezintă ordonata în secţiunea x a diagramei de momente încovoetoare, ce se desvoltă în sistemul static determinat de bază, acţionat numai de încărcările exterioare.

Rotirea ce se produce între feţele secţiunii din articulaţia i va fi:

$$\theta_i = \theta_{is} + \theta_{ii} . M_i = \partial L / \partial M_i = \int M_x . \partial M_x / \partial M_i . d\omega$$

Ţinând seama de expresia lui M_x şi de $\partial M_x / \partial M_i = m_{xi}$, avem:

$$\theta_i = \theta_{is} + \theta_{ii} . M_i = \int M_{xs} . m_{xi} . d\omega + M_i \int m_{xi}^2 . d\omega$$

Făcând acum $M_i = 0$, deci acţionând numai sarcinile exterioare, vom avea:

$$\theta_{is} = \int M_{xs} . m_{xi} . d\omega \tag{5}$$

Relaţiunile (3), (4) şi (5) ne dau expresiile tuturor deplasărilor ce intervin în sistemul de ecuaţii de echilibru elastic, arătate în formula (1).

In rezumat deci, acest sistem de ecuaţii e de forma:

art. 1 $\theta_{11} . M_1 + \ldots\ldots + \theta_{1k} . M_k + \ldots\ldots + \theta_{1n} . M_n + \theta_{1s} = 0$

art. 2 $\theta_{21} . M_1 + \ldots\ldots + \theta_{2k} . M_k + \ldots\ldots + \theta_{2n} . M_n + \theta_{2s} = 0$

....

art. *i* $\theta_{i1} . M_1 + \ldots\ldots + \theta_{ik} . M_k + \ldots\ldots + \theta_{in} . M_n + \theta_{is} = 0$

....

art. *n* $\theta_{n1} . M_1 + \ldots\ldots + \theta_{nk} . M_k + \ldots\ldots + \theta_{nn} . M_n + \theta_{ns} = 0$

unde coeficienţii cantităţilor static nedeterminate sunt:

$$\theta_{ii} = \int m_{xi}^2 . d\omega \qquad \text{şi} \qquad \theta_{ik} = \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega$$

iar termenii liberi ai ecuaţiilor:

$$\theta_{is} = \int M_{xs} . m_{xi} . d\omega$$

Se vede deci că toată problema se reduce la calculul deplasărilor elastice θ_{ii}, θ_{ik} şi θ_{is}, ce se produc în sistemul static determinat de bază, atunci când acesta e acţionat *succesiv* de încărcările statice şi de fiecare din cantităţile static nedeterminate. Construind diagramele M_{xs} şi m_{x1}, m_{x2}, ..m_{xn}, efectuând integralele, în lungul tuturor barelor construcţiunii, a produselor ordonatelor acestora, luate două câte două, se obţin toţi termenii ecuaţiilor. Se va vedea mai departe că, sistematizând puţin chestiunea, scrierea termenilor se poate face imediat, din simplă citire pe diagrame, fără niciun calcul anex; mai mult încă, dacă construcţiunea e făcută static determinată în mod convenabil, sistemul de ecuaţii se reduce considerabil, rezolvarea putând fi făcută cu uşurinţă.

Pentru moment vom face câteva observaţiuni asupra structurii sistemului de ecuaţii şi a expresiilor ce dau deplasările θ_{ii}, θ_{ik} şi θ_{is}.

1. Ecuaţiile de echilibru elastic reprezintă relaţiuni lineare, legând diferitele deplasări elastice ce se produc între feţele *aceleiaşi* secţiuni (în care s'a întrodus o articulaţie), atunci când construcţiunea static determinată e supusă succesiv acţiunii încărcărilor exterioare şi a tuturor cantităţilor static nedeterminate.

Prin aceasta se concretizează termenii ecuațiilor, ochiul putând avea o imagine a acestora, din considerarea diferitelor deformații ale sistemului static determinat de bază, eliminându-se astfel caracterul abstract al unor simple relații matematice.

2. Ținând seamă de reciprocitatea deplasărilor, simbolizată prin relația $\theta_{ik} = \theta_{ki}$, se constată că vom avea *simetrie* în tabloul coeficienților cantităților static nedeterminate, în raport cu diagonala ce conține coeficienți de forma θ_{ii}. Aceasta înseamnă că nu vom avea de calculat decât jumătate din numărul coeficienților de forma $\theta_{ik} = \theta_{ki}$, fiecare din aceștia figurând de două ori, odată sub forma θ_{ik} și a doua oară sub forma θ_{ki}.

Totodată, această particularitate poate servi și la controlul structurii sistemului de ecuații, permițând eliminarea eventualelor erori.

3. Coeficienții momentelor nu depind sub nici o formă de încărcările exterioare ale construcțiunii, ei fiind aceiași oricare ar fi aceste încărcări; deplasările θ_{ii} și θ_{ik} sunt caracterizate numai de modul cum a fost făcută întroducerea articulațiilor, deci de obținerea sistemului static determinat. Rezultă că vom obține expresii mai simple sau mai complicate pentru aceste deplasări, după modul mai mult sau mai puțin judicios în care se va face introducerea articulațiilor; acestei operațiuni trebue să i se dea toată atențiunea, de ea depinzând ușurința de rezolvare a problemei.

4. Expresiile găsite pentru deplasările θ_{ii} și θ_{ik}, în funcție de m_{xi} și m_{xk}, având forma:

$$\theta_{ii} = \int m_{xi}^2 . d\omega \quad \text{și} \quad \theta_{ik} = \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega$$

aduc pe primul plan chestiunea acestor coeficienți de influență. Ei nu sunt altceva decât ordonata, în o secțiune oarecare x, a diagramei de momente încovoetoare ce se desvoltă în sistemul static determinat, atunci când în una din articulații se aplică un moment exterior egal cu unitatea; vom avea câte o asemenea diagramă pentru fiecare din articulațiile introduse. Schițarea lor este extrem de simplă, dat fiind că în toate cazurile este vorba de un sistem static determinat, acționat de o singură solicitare: un moment aplicat pe cele două fețe ale secțiunii din articulația respectivă.

Depinde de modul cum s'au introdus articulațiile, ca diagramele să fie cât mai simple, *lucru esențial în toată această organizare de calcul.* Se va căuta deci ca sistemul static determinat de bază să fie astfel, încât diagramele coeficienților de influență *să se întindă pe cât mai puține bare ale construcțiunii.* Ușurința cu care aceste diagrame pot fi schițate, permite ca dela început să se poată examina comparativ diferite moduri de distribuție a articulațiilor, alegându-se cazul cel mai favorabil. Această situație face ca integralele produselor coeficienților de influență, luați doi câte doi, să fie *nule* pe cea mai mare parte din barele construcțiunii, căpătându-se expresii foarte simple pentru θ_{ii} și θ_{ik}.

Mai mult încă, atunci când sistemul este făcut static determinat în mod convenabil, multe din aceste integrale sunt *nule pe toate barele*, ceia ce înseamnă că o parte din deplasările ce figurează în tabloul coeficienților momentelor sunt nule; se creiază astfel numeroase *goluri* în structura sistemului de ecuații, ceia ce facilitează considerabil rezolvarea, așa cum se va vedea în aplicațiile tratate.

5. Termenii liberi ai ecuațiilor, de forma θ_{is}, sunt singurii în care apar încărcările exterioare ale construcțiunii. Ei fiind dați de expresia $\theta_{is} = \int M_{xs} . m_{xi} . d\omega$, se vede că va fi necesară trasarea diagramei de momente încovoetoare, ce se produc în sistemul static determinat sub acțiunea acestor încărcări. Desigur și această diagramă trebue să aibă formă cât mai simplă; din combinarea ei cu diagramele coeficienților de influență, se obțin toate deplasările θ_{is}.

E preferabil în unele cazuri să se traseze separat diagramele de momente ale încărcărilor pe diferite bare, suprapunând apoi rotirile θ_{is} corespunzătoare unei aceleiași articulațiuni, obținându-se termenul liber al ecuației respective. Şi aceste deplasări se bucură de aceiași caracteristică, arătată la punctul precedent, având forme foarte simple și în multe cazuri nule.

Remarcăm că rezolvarea chestiunii se poate face considerând *concomitent* toate sarcinile exterioare, corespunzătoare unei ipoteze de încărcare, fără a aduce prin aceasta o complicare a calculului; oricare ar fi aceste încărcări, termenii liberi ai ecuațiilor sunt rotirile rezultante, ce se exprimă totdeauna prin o singură cifră.

Se evită astfel repetarea întregului calcul pentru fiecare din încărcările exterioare, așa cum se procedează în metoda clasică, când suprapunerea de efecte se face asupra valorilor finale ale cantităților static nedeterminate.

6. Toate observațiunile de mai sus vor fi scoase în evidență cu ocazia tratării complete a unor exemple, când se vor mai arăta și alte caracteristici ale organizării de calcul, acesta fiind modul cel mai potrivit pentru remarcarea lor.

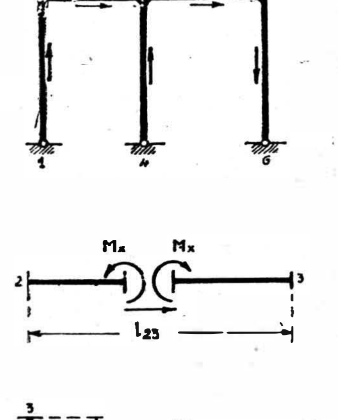
III. CONVENŢIE DE SEMNE, NOTAŢII ŞI SISTEMATIZĂRI DE CALCUL

La sisteme mai complicate e necesar să se fixeze o convenție de semne pentru momente. Ea poate fi făcută oricum, cu condiția de a fi respectată. In sine, semnul momentului nu are importanță; e esențial numai să se știe precis, pentru fiecare punct al unei bare, care este fața întinsă și care este cea comprimată, aceasta în mod cu totul deosebit la beton armat, unde armarea este în funcțiune de zonele tensionate.

La fiecare bară se va alege una din fețe, admițând că momentul în secțiune e *pozitiv* atunci când fața respectivă este *tensionată*. Această față se va nota pe schema construcțiunii, de exemplu: printr'o săgeată, astfel că vom avea precizată convenția de semne, cât și sensul de parcurgere. In fig. 3 se poate vedea o aplicare a convenției; s'au considerat

întinse, pentru moment pozitiv, fețele inferioare ale barelor orizontale, fețele din dreapta pentru barele *1—2* și *4—3*, fața din stânga pentru bara *5—6*. Secționând barele *2—3* (orizontală), *4—3* (verticală) și izolând un nod (*3*), se poate vedea în figură cum sunt orientate momentele pozitive. Această convenție va fi respectată la întocmirea tuturor diagramelor; desenarea se va face purtând momentele pozitive pe fețele alese și notate cum s'a văzut mai sus, iar momentele negative pe fețele opuse. In acest mod, punerea de semne pe diagrame poate fi suprimată, curbele de momente astfel trasate arătând pentru fiecare bară unde apar tensiunile.

Cantitățile static nedeterminate *vor fi presupuse inițial toate pozitive*, deci aceste momente se vor aplica în articulații astfel, ca să dea tensiuni (fibra medie deformată să prezinte convexitate), pe fețele alese prin convenția de semne a barelor alăturate articulației considerate; la finele calculului cantitățile static nedeterminate vor rezulta cu semn pozitiv sau negativ, indicând prin aceasta dacă sensul inițial ales este sau nu cel real. Vom ști deci precis cum acționează fiecare din aceste momente, putându-se desemna diagrama finală de momente încovoetoare a întregii construcțiuni considerate.



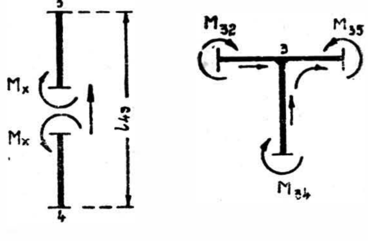


Fig. 3.

Privind expresiunile ce ne dau rotirile θ_{ii}, θ_{ik} și θ_{is}, se vede că sub integrale apare în toate cazurile $d\omega = dx/EI$, greutatea elastică la încovoere a elementului de bară dx. Integralele se întind pe întreaga construcțiune, deci vom integra succesiv pe fiecare bară în parte. Cazul curent întâlnit în practică este acela al barelor cu *secțiune constantă*, deci pentru o asemenea bară *i—k* vom avea $d\omega = dx/EI_{ik}$, unde numitorul EI_{ik} poate fi scos în afara integralei de pe bara respectivă. Cum în general întreaga construcțiune e făcută din acelaș material, deci având acelaș E în toate barele, vom putea multiplica fiecare din ecuațiile de echilibru elastic, deci toate rotirile θ_{ii}, θ_{ik} și θ_{is} cu EI, unde I este un moment de inerție arbitrar ales.

Se obține $d\omega' = EI.d\omega = dx.I/I_{ik} = n_{ik}.dx$, unde n_{ik} este pentru fiecare bară o constantă, ce o caracterizează din punct de vedere al secțiunii de încovoere.

Valoarea momentului de inerție arbitrar I se va alege astfel ca succe-

siunea de rapoarte:

$$n_{12} = I/I_{12}\,,\; n_{23} = I/I_{23}\,, \ldots\ldots n_{ik} = I/I_{ik}, \ldots\ldots$$

să capete forme numerice cât mai simple.

Inițial valorile I_{ik} nu sunt cunoscute; dat fiind că acestea figurează în ecuațiile de echilibru elastic, deci influențează valorile cantităților static nedeterminate, este necesar să se admită *a priori* niște cifre aproximative pentru momentele de inerție ale diferitelor bare, pe baza dimensiunilor *probabile* ale secțiunilor cadrului. Această aproximare inevitabilă permite rotunjiri, care pot da rapoartelor n_{ik} cifre cât mai simple.

Considerând și lungimea l_{ik} a unei bare oarecare și notând:

(6) $$n_{ik} . l_{ik} = I/I_{ik} . l_{ik} = \lambda_{ik}$$

obținem pentru fiecare bară o cantitate caracteristică λ_{ik}, ce o definește atât din punctul de vedere al lungimii, cât și din acela al momentului de inerție, reprezentând prin aceasta *caracteristica barei la încovoere.*

Cantitățile λ_{ik} se calculează dela început pentru toate barele cadrului, ele fiind elementul specific al ecuațiilor de echilibru elastic, așa cum se va vedea mai departe.

* * *

Să ne ocupăm acum de curbele de momente încovoetoare, date în sistemul static determinat de încărcările exterioare, cât și de diagramele coeficienților de influență. Construcțiunea fiind făcută static determinată în mod convenabil, fiecare bară în parte va avea rezemările ce corespund unei stări static determinate: articulație și reazem simplu, sau încastrare la un capăt și liberă la celălalt. Inspectând schema sistemului static determinat, se va vedea imediat cum trebue considerată bara din punct de vedere al rezemărilor dela capete.

In fig. 4 este arătat un cadru de 6 ori static nedeterminat; vor trebui introduse deci 6 articulații pentru obținerea sistemului static determinat de bază. Vom distribui mai întâiu patru articulații în *1*, *2*, *5* și *6*, permițând barelor să se rotească în jurul nodurilor respective. In nodul *3*, unde se întâlnesc 3 bare, se desvoltă 3 momente diferite — în secțiunile *a*, *b* și *c* din imediata vecinătate a nodului — legate între ele prin o relație de echilibru static:

$$M_{3a} + M_{3b} - M_{3c} = 0.$$

Spre a permite libera rotire a barelor în jurul nodului *3*, vor trebui introduse *două* articulații, de exemplu în secțiunile *a* și *b*, foarte apropiate de centrul nodului *3*.

Prin introducerea acestor șase articulațiuni, sistemul a devenit static determinat; el este static nedeformabil sub acțiunea încărcărilor exterioare, încastrarea din *4* împiedecându-l de a căpăta deplasări statice. Barele *1—2* și *5—6* trebuesc considerate articulate în *1* resp. *6* și simplu rezemate în *2* resp. *5*; barele *2—3* și *3—5* sunt articulate în *3* și simplu

rezemate în *2* şi *5*; bara *4—3* e încastrată în *4* şi liberă la capătul *3*, celelalte bare neputând împiedeca deplasarea pe orizontală a acestui nod.

Odată stabilite aceste lucruri, diagramele coeficienţilor m_{xi} se pot schiţa imediat. Presupunând aplicat un moment pozitiv, egal cu unitatea, pe cele două feţe ale secţiunii din articulaţia *2*, acesta va da diagrame pozitive triunghiulare pe barele *1—2* şi *2—3*; bara *2—3* va da acţiuni verticale de valoare $1/l_{23}$, trăgând de bară *1—2* şi presând asupra barei

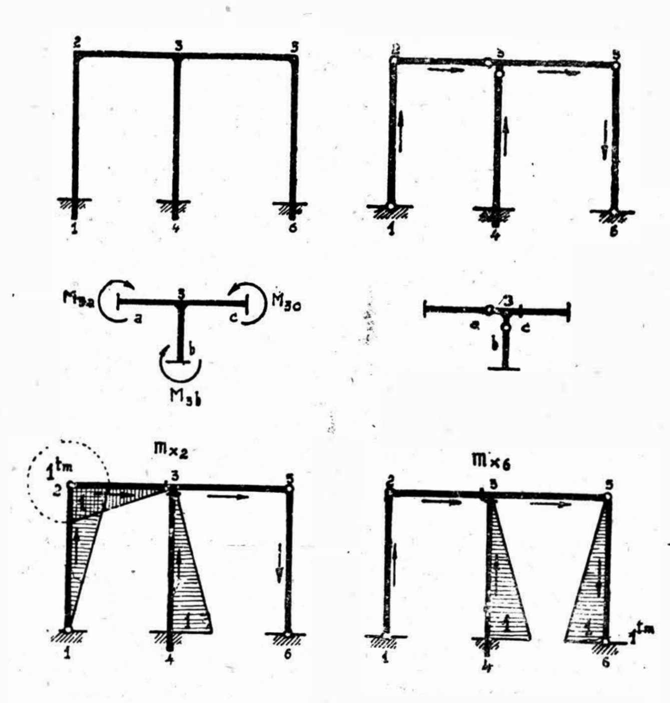


Fig. 4.

4—3, acţiuni ce corectează reacţiunile statice din *1* şi *4*. Bara *1—2* va da acţiuni orizontale de valoarea $1/l_{12}$ la cele două capete; în *1* va presa spre dreapta în articulaţie, în timp ce în *2* va trage de bara *2—3*, acţiune ce se transmite asupra capătului *3* al barei *4—3*, aceasta asigurând nedeformabilitatea statică a construcţiunii prin încastrarea din *4*. Pe bara *4—3* va apare deci o diagramă triunghiulară de moment pozitiv, convexitatea apărând la faţa aleasă prin convenţia de semne, aşa cum este arătată pe figură prin săgeţi. Am obţinut astfel diagrama coeficientului de influenţă m_{x2}, care se întinde pe 3 bare.

In mod analog s'a trasat diagrama coeficientului de influenţă m_{x6}, care se întinde numai pe 2 bare.

Observăm că expresia rotirilor $\theta_{26} = \theta_{62} = \int m_{x2} \cdot m_{x6} \cdot d\omega$ se va integra numai pe o singură bară, dat fiind că diagramele coeficienţilor de influenţă m_{x2} şi m_{x6} au numai o singură bară comună, anume bara *4—3*, pe celelalte unul din aceşti coeficienţi fiind nul.

In ceia ce priveşte diagramele de momente datorite încărcărilor exterioare, acestea se vor trasa analog diagramelor coeficienţilor de influenţă, ţinând seama totdeauna de acţiunea reciprocă din noduri între diferitele bare.

* * *

S'a văzut că deplasările ce intervin în ecuaţiile de echilibru elastic sunt de forma:

$$\theta^i{}_i = \int m^2_{xi} . d\omega; \quad \theta_{ik} = \int m_{xi} . m_{xk} . d\omega; \quad \theta_{is} = \int M_{xs} . m_{xi} . d\omega$$

deci totdeauna vom avea de integrat, în lungul barelor, produsul ordonatelor a două din diagrame. Faptul că aceste diagrame sunt totdeauna foarte simple, face ca diferitele lor aspecte pe o aceiaşi bară să se reducă la numai câteva cazuri, astfel că putem găsi dela început rezultate generale de integrare pentru aceste cazuri, stabilind expresii tip.

Considerând o bară *i —k* în cele două situaţii de rezemare la capete, caracteristice stării static determinate, se pot întâlni cazurile arătate în figura 5 şi anume:

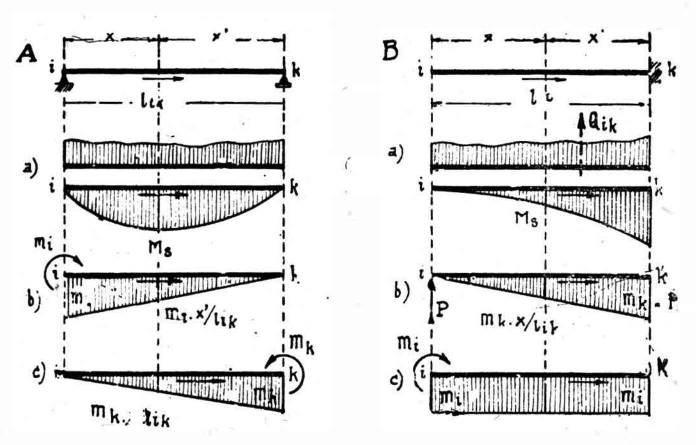


Fig. 5.

A. *Bară articulată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt:*

a) pentru încărcările statice pe bară, o diagramă oarecare M_s, aceia a unei grinzi simplu rezemate;

b) o suprafață triunghiulară, produsă de un moment m_i aplicat în secțiunea i;

c) o suprafață triunghiulară, produsă de un moment m_k aplicat în secțiunea k.

B. *Bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt*:

a) pentru încărcările statice pe bară, o diagramă oarecare M_s, aceia a unei grinzi încastrate;

b) o suprafață triunghiulară, provenind dela o acțiune P a celorlalte bare în punctul i, normală pe $i - k$;

c) o suprafață dreptunghiulară, provenind dela un moment m_i, aplicat în secțiunea i.

Diagramele de tip *a)* provin dela încărcările statice, în timp ce acelea de tip *b)* sau *c)* provin în general dela coeficienții de influență.

Ținând seama de aceste tipuri, integralele se efectuează imediat, în figura 5 fiind indicate și ordonatele în secțiunea oarecare x a acestor diagrame. Dăm diferitele combinații ce se pot face, luând cazurile de mai sus două câte două.

I. *Rezemări A*

produs *a)* cu *b)* $$\int_i^k M_s\, m_i \frac{x'}{l_{ik}} . n_{ik}\, dx = m_i\, n_{ik}\, S_{ki}/l_{ik}$$

produs *a)* cu *c)* $$\int_i^k M_s\, m_k \frac{x}{l_{ik}} . n_{ik}\, dx = m_k\, n_{ik}\, S_{ik}/l_{ik}$$

produs *b)* cu *c)* $$\int_i^k m_i \frac{x'}{l_{ik}} . m_k \frac{x}{l_{ik}} . n_{ik}\, dx = m_i\, m_k\, n_{ik}\, l_{ik}/6$$

produs *b)* cu *b')* $$\int_i^k m_i \frac{x'}{l_{ik}} . m_i' \frac{x'}{l_{ik}} . n_{ik}\, dx = m_i\, m'\, n_{ik}\, l_{ik}/3$$

produs *c)* cu *c')* $$\int_i^k m_k \frac{x}{l_{ik}} . m_k' \frac{x}{l_{ik}} . n_{ik}\, dx = m_k m_k' n_{ik}\, l_{ik}/3$$

produs *b)* cu *b)* $$\int_i^k m_i^2 \frac{x'^2}{l_{ik}^2} . n_{ik}\, dx = m_i^2\, n_{ik}\, l_{ik}/3$$

produs *c)* cu *c)* $$\int_i^k m_k^2 \frac{x^2}{l_{ik}^2} . n_{ik}\, dx = m_k^2\, n_{ik}\, l_{ik}/3$$

Produsele *b)* cu *b')* și *c)* cu *c')* se referă la cazul când cele două diagrame ce se multiplică au triunghiurile orientate în același fel.

II. *Rezemări B*

produs *a)* cu *b)* $\int_i^k M_s\, m_k \frac{x}{l_{ik}} . n_{ik}\, dx = m_k\, n_{ik}\, S_{ik}/l_{ik}$

produs *a)* cu *c)* $\int_i^k M_s\, m_i\, n_{ik}\, dx = m_i\, n_{ik}\, \Omega_{ik}$

produs *b)* cu *c)* $\int_i^k m_k \frac{x}{l_{ik}} . m_i\, n_{ik}\, dx = m_i\, m_k\, n_{ik}\, l_{ik}/2$

produs *b)* cu *b)* $\int_i^k m_k^2 \frac{x^2}{l_{ik}^2} . n_{ik}\, dx = m_k^2\, n_{ik}\, l_{ik}/3$

produs *c)* cu *c)* $\int_i^k m_i^2\, n_{ik}\, dx = m_i^2\, n_{ik}\, l_{ik}$

In cele de mai sus s'a notat cu S_{ik} resp. S_{ki}, momentul static a suprafeţei de momente M_s, în raport cu secţiunea i resp. k.

Ω_{ik} este suprafaţa diagramei de momente M_s.

Ţinând seama că am notat:

$$n_{ik} . l_{ik} = \lambda_{ik},$$

întroducând notaţiile:

$$(7) \qquad 6 n_{ik} . \frac{S_{ki}}{l_{ik}} = R_i; \quad 6 n_{ik} . \frac{S_{ik}}{l_{ik}} = R_k \quad \text{şi} \quad 6 n_{ik}\, \Omega_{ik} = F_{ik}$$

şi multiplicând toate ecuaţiile cu 6 (astfel că ele devin multiplicate cu 6*EI*, multiplicarea cu *EI* fiind făcută atunci când am introdus pe n^{ik}), produsele obţinute mai sus capătă formele foarte simple:

TABLOU *cuprinzând rezultatele tip de integrare.*

Rezemări A			Rezemări B		
produs	*a)* cu *b)*	$m_i\, R_i$			
produs	*a)* cu *c)*	$m_k\, \mathbf{R}$	produs	*a)* cu *b)*	$m_k\, R_k$
produs	*b)* cu *c)*	$\lambda_{ik} . m_i\, m_k$	produs	*a)* cu *c)*	$m_i . F_{ik}$
produs	*b)* cu *b')*	$2 \lambda_{ik} . m_i\, m_i'$	produs	*b)* cu *c)*	$3 \lambda_{ik}\, m_i\, m_k$
produs	*c)* cu *c')*	$2 \lambda_{ik} . m_k\, m_k'$	produs	*b)* cu *b)*	$2 \lambda_{ik} . m_k^2$
produs	*b)* cu *b)*	$2 \lambda_{ik} . m_i^2$	produs	*c)* cu *c)*	$6 \lambda_{ik} . m_i^2$
produs	*c)* cu *c)*	$2 \lambda_{ik} . m_k^2$			

Acestea sunt formele diferiților coeficienți ai cantităților static nedeterminate din ecuațiile de echilibru elastic, cât și a termenilor liberi. Factorii m_i, m_i', m_k, m_k' se găsesc pe diagramele coeficienților de influență, cifrele respective fiind scrise odată cu schițarea diagramelor; în aproape totalitatea cazurilor *valoarea lor este egală cu 1*, cazul contrar fiind cu totul excepțional, apărând numai uneori la termenii liberi.

Rezultă că rotirile θ_{ii} și θ_{ik}, coeficienții cantităților static nedeterminate din sistemul de ecuații, se reduc la forma extrem de simplă $\Sigma\alpha\lambda_{ik}$, sumarea întinzându-se numai la barele pe care *ambele* diagrame de coeficienți de influență considerate prezintă suprafață de moment, iar α putând fi 1, 2, 3 sau 6, după forma și orientarea celor două diagrame pe bara $i-k$.

Este vizibilă ușurința deosebită cu care acești coeficienți pot fi *citiți* direct de pe diagrame, ochiul observând imediat pentru fiecare bară dacă este cazul a două triunghiuri orientate în sens contrar, a două triunghiuri orientate în acelaș fel, a unui triunghiu și un dreptunghiu, sau a două dreptunghiuri; se obțin astfel toți coeficienții cantităților static nedeterminate, deci rotirile θ_{ik} și θ_{ii}, exprimați cu ajutorul elementului caracteristic al fiecărei bare: λ_{ik}.

In ceia ce privește termenii liberi ai ecuațiilor, aceștia se pot scrie cu multă ușurință, ținând seamă de expresiile (7), toată chestiunea reducându-se la a calcula pe diferite bare suprafețele de momente, sau momentele statice ale acestor suprafețe în raport cu extremitățile barei considerate; expresiunile pentru F_{ik} și S_{ik} sau S_{ki} se pot stabili ușor în diferite cazuri de încărcări exterioare, ce se întâlnesc mai frecvent. Dăm la pag. 260 câteva din aceste cazuri, de care vom avea nevoie în aplicațiile ce vom face.

Pe baza celor arătate până aici, scrierea ecuațiilor de echilibru elastic se poate face extrem de simplu, citind direct de pe diagrame coeficienții cantităților static nedeterminate, cât și termenii liberi, valorile numerice ale acestora din urmă obținându-se cu ajutorul formulelor arătate pentru S_{ik}, S_{ki} și F_{ik}.

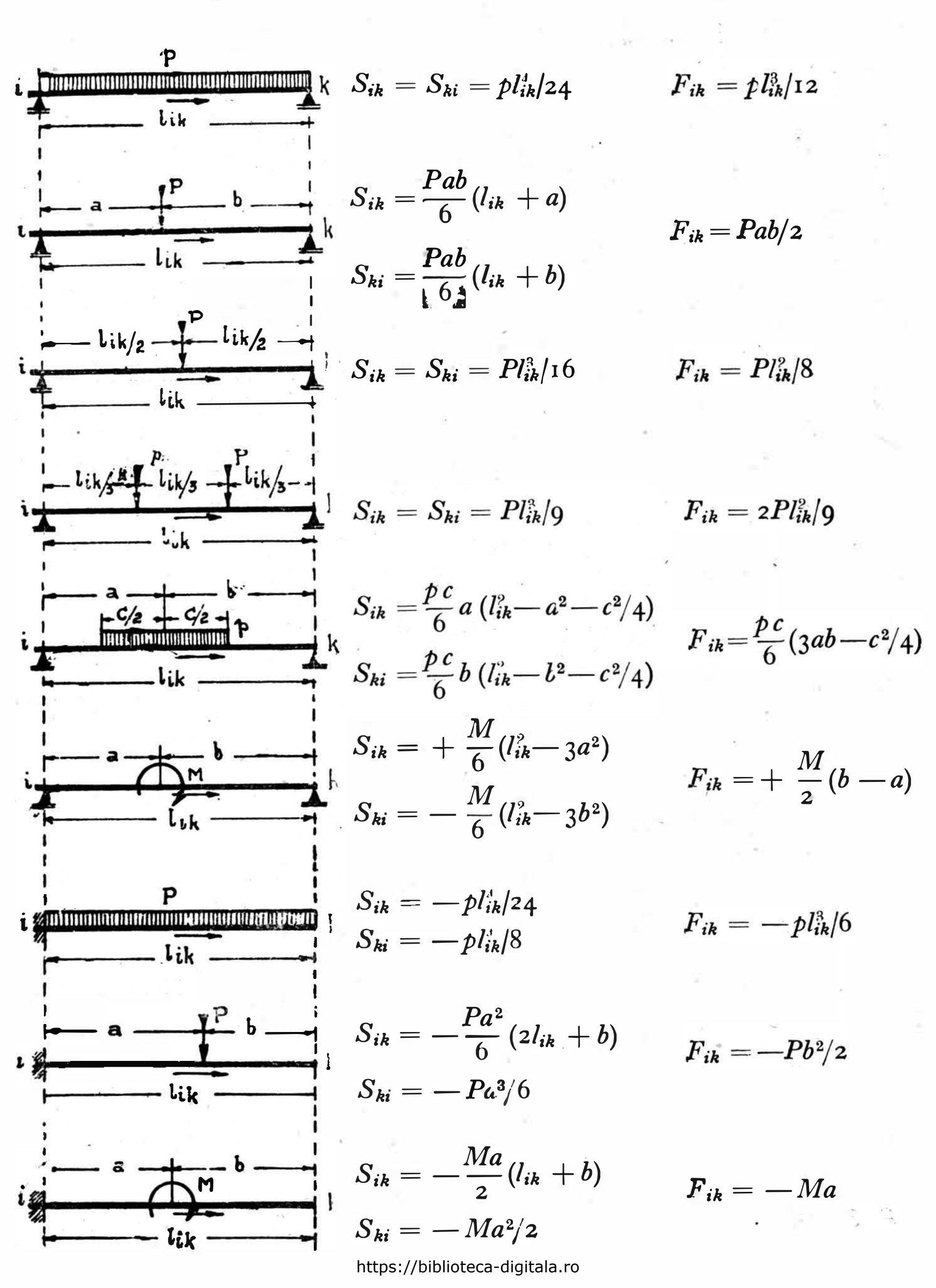
In capitolul ce urmează vom aplica pe câteva exemple organizarea de calcul arătată.

IV. APLICAREA ORGANIZĂRII DE CALCUL LA CÂTEVA EXEMPLE

A. *Grinda continuă*

Considerăm o grindă continuă pe patru deschideri neegale, având secțiune constantă între două reazeme succesive, caracterizată de momentele de inerție I_{12}, I_{23}, I_{34} și I_{45}. Construcțiunea e de trei ori static nedeterminată; vor trebui introduse deci trei articulațiuni. Vom face aceasta întrerupând continuitatea în dreptul reazemelor intermediare *2*, *3* și *4*. Sistemul static determinat obținut e solicitat de încărcările exterioare și cantitățile static nedeterminate M_2, M_3 și M_4, considerate inițial pozitive.

Expresiile S_{ik}, S_{ki} şi F_{ik} în câteva cazuri simple



1	$S_{ik} = S_{ki} = pl_{ik}^4/24$	$F_{ik} = pl_{ik}^3/12$
2	$S_{ik} = \frac{Pab}{6}(l_{ik} + a)$; $S_{ki} = \frac{Pab}{6}(l_{ik} + b)$	$F_{ik} = Pab/2$
3	$S_{ik} = S_{ki} = Pl_{ik}^3/16$	$F_{ik} = Pl_{ik}^2/8$
4	$S_{ik} = S_{ki} = Pl_{ik}^2/9$	$F_{ik} = 2Pl_{ik}^2/9$
5	$S_{ik} = \frac{pc}{6} a\,(l_{ik}^2 - a^2 - c^2/4)$; $S_{ki} = \frac{pc}{6} b\,(l_{ik}^2 - b^2 - c^2/4)$	$F_{ik} = \frac{pc}{6}(3ab - c^2/4)$
6	$S_{ik} = + \frac{M}{6}(l_{ik}^2 - 3a^2)$; $S_{ki} = - \frac{M}{6}(l_{ik}^2 - 3b^2)$	$F_{ik} = + \frac{M}{2}(b - a)$
7	$S_{ik} = -pl_{ik}^4/24$; $S_{ki} = -pl_{ik}^4/8$	$F_{ik} = -pl_{ik}^3/6$
8	$S_{ik} = -\frac{Pa^2}{6}(2l_{ik} + b)$; $S_{ki} = -Pa^3/6$	$F_{ik} = -Pb^2/2$
9	$S_{ik} = -\frac{Ma}{2}(l_{ik} + b)$; $S_{ki} = -Ma^2/2$	$F_{ik} = -Ma$

Grupul de ecuaţii e de forma:

$$\begin{aligned} &\text{art. } 2 \quad \theta_{22} M_2 + \theta_{23} M_3 + \theta_{24} M_4 + \theta_{2s} = 0 \\ &\text{art. } 3 \quad \theta_{32} M_2 + \theta_{33} M_3 + \theta_{34} M_4 + \theta_{3s} = 0 \\ &\text{art. } 4 \quad \theta_{42} M_2 + \theta_{43} M_3 + \theta_{44} M_4 + \theta_{4s} = 0 \end{aligned}$$

Construim curba de momente M_s, cât şi diagramele coeficienţilor de influenţă m_{x2}, m_{x3} şi m_{x4} (fig. 6).

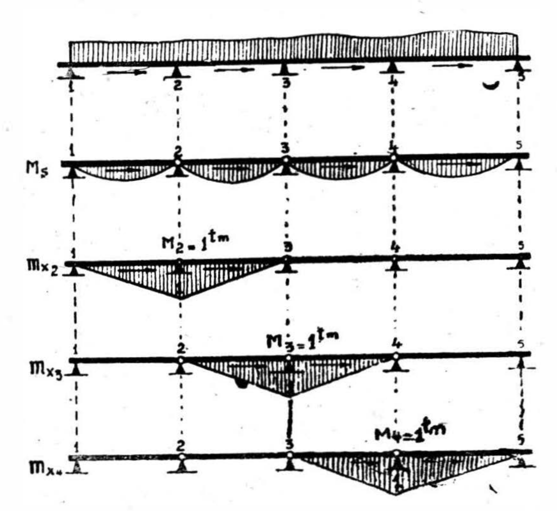


Fig. 6. — Grinda continuă.

Ţinând seamă de expresiile diferitelor rotiri, cât şi de rezultatele tip de integrare, se citesc direct pe diagrame ecuaţiile de echilibru elastic. Cei doi indici ai fiecărei rotiri arată lămurit care sunt cele două diagrame ce intervin. Se vede că peste tot avem: $m_i = m_i' = m_k = m_k' = 1$.

Ecuaţiile sunt de forma:

$$\begin{aligned} 2(\lambda_{12}+\lambda_{23}) M_2 + \lambda_{23} M_3 + R_{2(1-2)} + R_{2(2-3)} &= 0 \\ \lambda_{23} M_2 + 2(\lambda_{23}+\lambda_{34}) M_3 + \lambda_{34} M_4 + R_{3(2-3)} + R_{3(3-4)} &= 0 \\ \lambda_{34} M_3 + 2(\lambda_{34}+\lambda_{45}) M_4 + R_{4(3-4)} + R_{4(4-5)} &= 0 \end{aligned}$$

care permit determinarea necunoscutelor M_2, M_3 şi M_4.

In cazul particular când pentru toată grinda $I = ct.$, avem:

$$n_{12} = n_{23} = n_{34} = n_{45} = 1, \quad \text{deci} \quad \lambda_{ik} = l_{ik}$$

iar $R_i = 6S_{ki}/ l_{ik}$ şi $R_k = 6S_{ik}/l_{ik}$

Ecuaţiile devin:

$$2(l_{12}+l_{23})M_2 + l_{23}M_3 + 6\left(\frac{S_{12}}{l_{12}}+\frac{S_{32}}{l_{23}}\right)=0$$

$$l_{23}M_2 + 2(l_{23}+l_{34})M_3 + l_{34}M_4 + 6\left(\frac{S_{23}}{l_{23}}+\frac{S_{43}}{l_{34}}\right)=0$$

$$l_{34}M_3 + 2(l_{34}+l_{45})M_4 + 6\left(\frac{S_{34}}{l_{34}}+\frac{S_{54}}{l_{45}}\right)=0$$

regăsind astfel ecuaţiile cunoscute ale lui *Clapeyron*.

B. *Cadre cu noduri fixe.*

Sunt caracterizate prin faptul că, neglijând lungirile sau scurtările barelor, datorite solicitărilor axiale, nodurile cadrului nu se deplasează atunci când construcţiunea trece dela starea iniţială la cea deformată; ele rămân fixe ca poziţie în plan, putând suferi numai rotiri, dat fiind că în aceste cazuri există totdeauna rezemări ce împiedecă orice deplasare orizontală.

Datorită acestei particularităţi, construcţiunea îşi păstrează nedeformabilitatea statică chiar când toate rezemările sunt transformate în articulaţiuni, nefiind necesară păstrarea vreunei încastrări (în rezemări sau în noduri), atunci când se formează sistemul static determinat de bază.

In aplicaţiunile ce urmează, referindu-ne la câteva asemenea cadre, vom arăta modul de aplicare al organizării de calcul propuse.

1. *Cadru dublu articulat, format din două bare.*

Sistemul e simplu static nedeterminat, astfel că e necesară introducerea unei singure articulaţiuni, pe care o plasăm în nodul 2. Va fi o singură ecuaţie de echilibru elastic, corespunzătoare acestei articulaţiuni, de forma:

$$\theta_{22}.M_2 + \theta_{2s} = 0$$

care va da cantitatea static nedeterminată M_2.

Ţinând seama de expresiile rotirilor θ_{22} şi θ_{2s}, cât şi rezultatele tip de integrare, citim pe diagramele M_s şi m_{x2} relaţia:

$$2(\lambda_{12}+\lambda_{23})M_2 + R_{2(1-2)} + R_{2(2-3)} = 0$$

care dă:

$$M_2 = -\frac{\theta_{2s}}{\theta_{22}} = -\frac{R_{2(1-2)}+R_{2(2-3)}}{2(\lambda_{12}+\lambda_{23})}.$$

Pentru cazul numeric arătat în fig. 7, considerăm $n_{12} = 1$ şi $n_{23} = 2$. Vom avea:

$$\lambda_{12} = 1.6 = 6\ m;\ \lambda_{23} = 2.5 = 10\ \text{m}.$$

Pentru încărcările date, ţinând seama de formulele dela pag. 260 va rezulta:

$$6\ S_{12}/l_{12} = pl_{12}^3/4 = 2.6^3/4 = 108\ \text{tm}^2.$$

$$6\ S_{32}/l_{23} = Pab\,(l_{23}+b)/l_{23} = 3.2.3\,(5+2)/5 = 25{,}2\ \text{tm}^2$$

de unde:

$$R_{2(1-2)} = 6n_{12}\,.\,S_{12}/l_{12} = 1\,.\,108 = 108 \text{ tm}^2.$$

$$R_{2(2-3)} = 6n_{23}\,.\,S_{32}/l_{23} = 2\,.\,25{,}2 = 50{,}4 \text{ tm}^2$$

deci: $M_2 = -\,158{,}4/32 = -\,4{,}95$ *tm*.

Diagrama de momente încovoetoare a cadrului este arătată în fig. 7, momentul maxim în bara 1—2 fiind + 6,71 tm, iar în bara 2—3 având valoarea + 1,62 tm, în dreptul forţei orizontale.

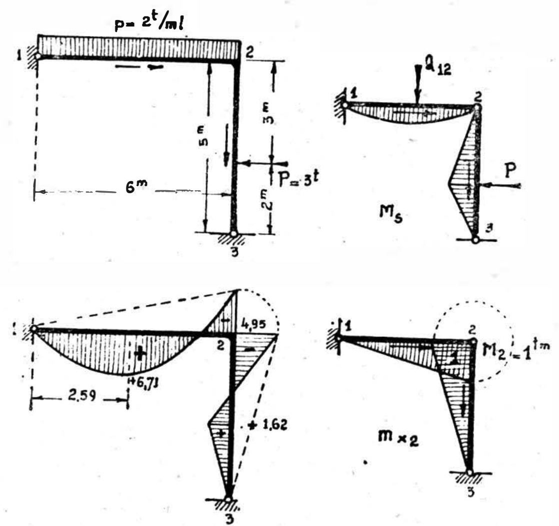


Figura 7. — Cadru dublu articulat.

2. *Cadru dublu incastrat, format din două bare.*

Sistemul e triplu static nedeterminat; introducând articulaţii în 1, 2 şi 3, se obţine sistemul static determinat de bază. Grupul relaţiilor de echilibru elastic este în acest caz:

art. 1 $\theta_{11} M_1 + \theta_{12} M_2 + \theta_{13} M_3 + \theta_{1s} = 0$

art. 2 $\theta_{21} M_1 + \theta_{22} M_2 + \theta_{23} M_3 + \theta_{2s} = 0$

art. 3 $\theta_{31} M_1 + \theta_{32} M_2 + \theta_{33} M_3 + \theta_{3s} = 0$

Diagramele M_s şi m_{x1}, m_{x2}, m_{x3} sunt arătate în figura 8.

Ţinând seama de expresiile rotirilor θ_{ii}, θ_{ik} şi θ_{is}, cât şi de rezultatele tip de integrare, se citesc pe diagrame relaţiile de mai jos, observând mereu că cei doi indici ai fiecărei rotiri indică grupele de două diagrame ce trebuesc considerate.

$$2\lambda_{12} M_1 + \lambda_{12} M_2 + R_{1(1-2)} = 0$$

$$\lambda_{12} M_1 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + \lambda_{23} M_3 + R_{2(1-3)} = 0$$

$$\lambda_{23} M_2 + 2\lambda_{23} M_3 + R_{3(2-3)} = 0$$

Observăm că — în acest caz — se obţin aceleaşi relaţii ce s'ar găsi aplicând formula *Clapeyron* de trei ori pe grinda continuă dublu încastrată 1-2-3.

Prima şi a treia din ecuaţii reprezintă câte o legătură între momentele M_1 şi M_2, respectiv M_3 şi M_2, ele putând servi la eliminarea necunoscutelor M_1 şi M_3 din ecuaţia a doua; în felul acesta rezolvarea problemei se reduce în fond la rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscută.

Privind ecuaţiile de echilibru elastic şi diagramele coeficienţilor de influenţă, se observă că — odată format acest sistem de ecuaţii — putem studia comparativ influenţa naturei rezemărilor din 1 şi 3 asupra necunoscutelor static nedeterminate şi deci a diagramei finale de momente încovoetoare. Astfel, dacă în 1 cadrul ar avea articulaţie în loc de încastrare, diagrama m_{x1} ar dispare — nemai existând necunoscuta static nedeterminată M_1 — deci toţi coeficienţii de forma θ_{ik}, θ_{ii} şi θ_{is}, unde i sau k este 1, dispar. Analog, dacă în 3 cadrul ar avea articulaţie în loc de încastrare, dispare diagrama m_{x3}, prin aceasta dispărând din ecuaţii toate rotirile unde i sau k este 3; în fine, când cadrul ar avea articulaţii în 1 şi 3, dispar diagramele m_{x1} şi m_{x3}, deci toate rotirile unde i sau k sunt 1 şi 3.

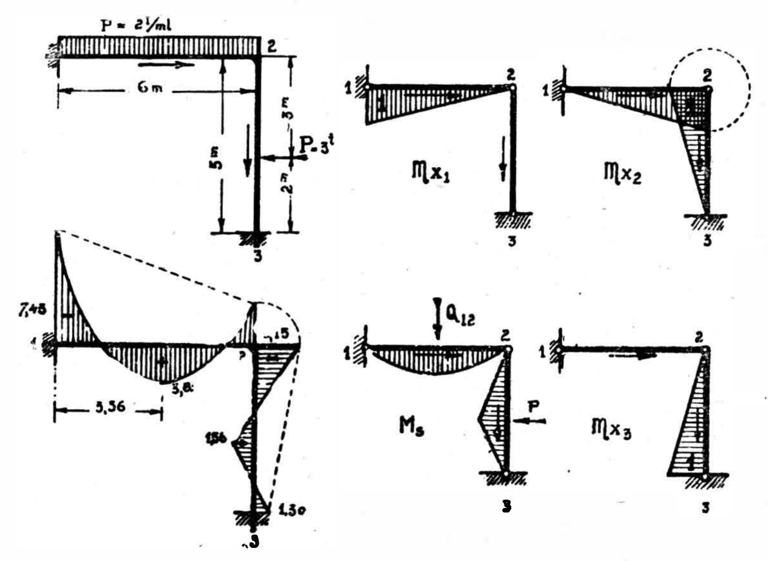


Fig. 8. — Cadru dublu încastrat.

Grupul de ecuaţii devine în diverse cazuri:

a) *cadru încastrat în 1 şi 3*

art. 1 $\quad 2\lambda_{12} M_1 + \lambda_{12} M_2 + R_{1(1-2)} = 0$

art. 2 $\quad \lambda_{12} M_1 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + \lambda_{23} M_3 + R_{2(1-3)} = 0$

art. 3 $\quad \lambda_{23} M_2 + 2\lambda_{23} M_3 + R_{3(2-3)} = 0;$

b) *cadru încastrat în 1 şi articulat în 3*

art. 1 $\quad 2\lambda_{12} M_1 + \lambda_{12} M_2 + R_{1(1-2)} = 0$

art. 2 $\quad \lambda_{12} M_1 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + R_{2(1-3)} = 0$

c) *cadru încastrat în 3 şi articulat în 1*

art. 2 $\quad 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + \lambda_{23} M_3 + R_{2(1-3)} = 0$

art. 3 $\quad \lambda_{23} M_2 + 2\lambda_{23} M_3 + R_{3(2-3)} = 0$

d) *cadru articulat în 1 şi 3*

art. 2 $\quad 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + R_{2(1-3)} = 0$

Este de remarcat că în toate aceste forme ale sistemului de ecuaţii, *rotirile sunt aceleaşi*, deci putem obţine direct cazurile b), c) şi d) din cazul a), prin simpla anu-

lare a termenilor ce conţin rotiri, care au indici corespunzători diagramelor de coeficienţi de influenţă ce nu mai intervin în calcul, datorită inexistenţei de cantitate static nedeterminată în articulaţia respectivă.

Concluzia este că, odată format sistemul ecuaţiilor de echilibru elastic, putem calcula atât cantităţile static nedeterminate corespunzătoare cadrului considerat, cât şi acelea ale aceluiaşi cadru, având diferite cazuri de rezemări mai simple (articulaţii în loc de încastrări), putând astfel trage concluzii comparative asupra influenţei diferitelor moduri de rezemare în diagrama finală de momente încovoetoare. Această constatare îşi capătă adevărata ei valoare în cazul sistemelor cu grad de nedeterminare mai ridicat, unde constituirea pe alte căi a diferitelor grupe de ecuaţii ar fi mult mai laborioasă.

Pentru cadrul considerat, toate cele patru grupe găsite mai sus se reduc în fond la rezolvarea unei singure ecuaţii cu o necunoscută (M_2), restul ecuaţiilor reprezentând relaţii de legătură între câte două necunoscute. Vom avea:

a) *Cadru încastrat în 1 şi 3*

$$3(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + 2R_{2(1-3)} - R_{1(1-2)} - R_{3(2-3)} = 0$$

b) *Cadru încastrat în 1 şi articulat în 3*

$$(3\lambda_{12} + 4\lambda_{23}) M_2 + 2R_{2(1-3)} - R_{1(1-2)} = 0$$

c) *Cadru încastrat în 3 şi articulat în 1*

$$(4\lambda_{12} + 3\lambda_{23}) M_2 + 2R_{2(1-3)} - R_{3(2-3)} = 0$$

d) *Cadru articulat în 1 şi 3*

$$2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) M_2 + R_{2(1-3)} = 0.$$

Această ultimă relaţie am întâlnit-o şi la exemplul precedent.

Trecând la aplicaţia numerică, vom admite: $n_{12} = 1$ şi $n_{23} = 2$.

Pentru încărcările statice date:

$$6S_{12}/l_{12} = 6S_{21}/l_{12} = pl^3_{12}/4 = 2.6^3/4 = 108 \text{ tm}^2$$

$$6S_{23}/l_{23} = Pab\,(l_{23} + a)/l_{23} = 3.2.3\,(5 + 3)/5 = 28,8 \text{ tm}^2$$

$$6S_{32}/l_{23} = Pab\,(l_{23} + b)/l_{23} = 3.2.3\,(5 + 2)/5 = 25,2 \text{ tm}^2$$

deci:

$$\lambda_{12} = 1.\ 6 = 6 \text{ m};\ \lambda_{23} = 2.\ 5 = 10 \text{ m}.$$

$$R_{1(1-2)} = 6n_{12}.S_{21}/l_{12} = 1.108 = 108 \text{ tm}^2$$

$$R_{2(1-3)} = 6n_{12}.S_{12}/l_{12} + 6n_{23}.S_{32}/l_{23} = 1.108 + 2.\ 25,2 = 158,4 \text{ tm}^2$$

$$R_{3(2-3)} = 6n_{23}.S_{23}/l_{23} = 2.\ 28,8 = 57,6 \text{ tm}^2$$

Cu aceste valori se pot forma oricare din grupele a), b), c) sau d).

Considerăm cazul a), cadrul dublu încastrat.

Ecuaţia în M_2 devine:

$$48\,M_2 + 151,2 = 0 \qquad \text{deci} \qquad M_2 = -3,15 \ tm.$$

Din prima şi a treia ecuaţie se obţine:

$$M_1 = -7,43 \ tm. \qquad \text{şi} \qquad M_3 = -1,30 \ tm.$$

Diagrama variaţiei momentelor încovoetoare este dată în fig. 8.

Solicitările axiale în bare sunt:

$$N_{12} = 2P/5 + (M_3 - M_2)/5 = 2.3/5 + 1,85/5 = 1,57 \text{ t. compresiune}$$

$$N_{23} = 2.3 + (M_1 - M_2)/6 = 6 - 4,2/6 = \quad 5,29 \text{ t. compresiune}$$

3. *Cadru cu două încastrări şi un reazem simplu.*

Construcţiunea este de patru ori static nedeterminată; vom obţine sistemul static determinat de bază introducând patru articulaţii şi anume: câte o articulaţie în 1 şi 4, două articulaţii în nodul 2, 3 (la capetele 2 şi 3 ale barelor 1-2 şi 4-3). Necunoscutele vor fi M_1, M_2, M_3 şi M_4.

Grupul relaţiilor de echilibru elastic va fi:

art. 1 $\theta_{11}M_1 + \theta_{12}M_2 + \theta_{13}M_3 + \theta_{14}M_4 + \theta_{1s} = 0$

art. 2 $\theta_{21}M_1 + \theta_{22}M_2 + \theta_{23}M_3 + \theta_{24}M_4 + \theta_{2s} = 0$

art. 3 $\theta_{31}M_1 + \theta_{32}M_2 + \theta_{33}M_3 + \theta_{34}M_4 + \theta_{3s} = 0$

art. 4 $\theta_{41}M_1 + \theta_{42}M_2 + \theta_{43}M_3 + \theta_{44}M_4 + \theta_{4s} = 0.$

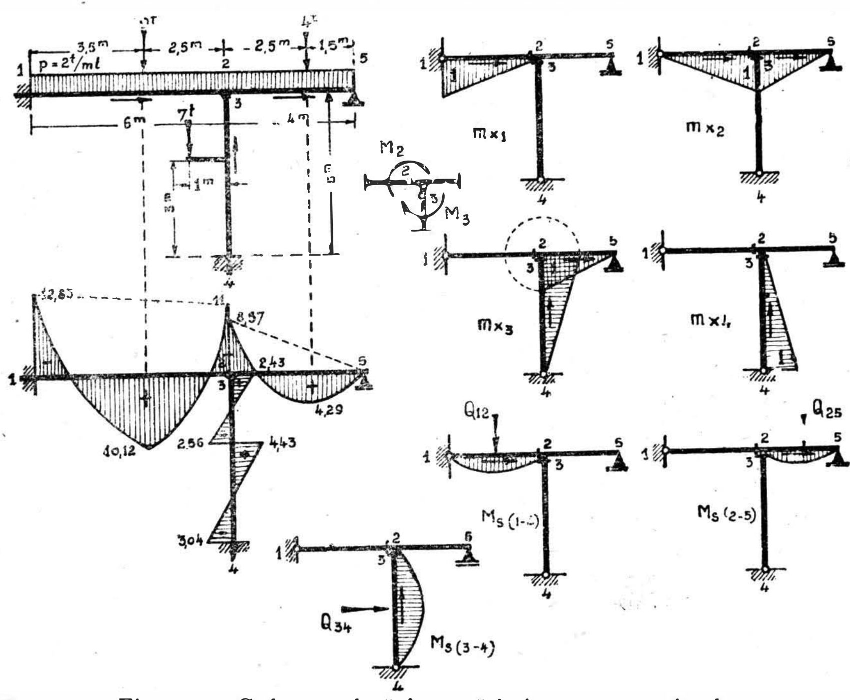


Fig. 9. — Cadru cu două încastrări şi un reazem simplu.

In fig. 9 sunt date diagramele de momente produse de încărcări statice oarecare pe diferite bare, acestea întinzându-se — datorită distribuţiei articulaţiilor — numai pe barele acţionate direct de încărcări; de asemenea sunt schiţate diagramele coeficienţilor de influenţă m_{x1}, m_{x2}, m_{x3} şi m_{x4}.

Ţinând seamă de expresiile rotirilor θ_{ii}, θ_{ik} şi θ_{is} — cât şi de rezultatele tip de integrare — şi considerând încărcate succesiv barele 1-2, 2-5 şi 4-3 cu sarcini oarecare, ce dau diagramele de momente $M_{s(1-2)}$, $M_{s(2-5)}$ şi $M_{s(4-3)}$, se obţin rezultatele înscrise în tabloul alăturat, care reprezintă de fapt grupul ecuaţiilor de echilibru elastic.

Fiecare *rând* din tablou se referă la toate rotirile ce se produc în *aceiaşi* secţiune i, unde s'a introdus o articulaţie; fiecare *coloană* din tablou se referă la rotirile ce se produc în articulaţiile 1, 2, 3 şi 4 sub acţiunea a câte uneia din solicitările ce se aplică sistemului static determinat de bază, anume M_1, M_2, M_3 şi M_4, sau încărcări oarecare pe barele 1-2, 2-5 şi 4-3. In felul acesta fiecare rând al tabloului reprezintă termenii uneia din ecuaţiile de echilibru elastic.

TABLOU *de expresiile rotirilor* θ_{ii}, θ_{ik} *şi* θ_{is}

		M_1	M_2	M_3	M_4	$M_{s(1-2)}$	$M_{s(2-5)}$	$M_{s(4-3)}$
Art.	θ_{ik}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{is}	θ_{is}	θ_{is}
1	θ_{1k}	$2\lambda_{12}$	λ_{12}	—	—	$R_{1(1-2)}$	—	—
2	θ_{2k}	λ_{12}	$2(\lambda_{12}+\lambda_{25})$	$2\lambda_{25}$	—	$R_{2(1-2)}$	$R_{2(2-5)}$	—
3	θ_{3k}	—	$2\lambda_{25}$	$2(\lambda_{25}+\lambda_{43})$	λ_{43}	—	$R_{2(2-5)}$	$R_{3(4-3)}$
4	θ_{4k}	—	—	λ_{43}	$2\lambda_{43}$	—	—	$R_{4(4-3)}$

In toate diagramele avem: $m_i = m'_i = m_k = m'_k = 1$

.Se remarcă forma foarte simplă a ecuaţiilor. Deasemenea, referitor la termenii liberi, observăm că se pot considera oricum încărcările cadrului, fără a complica rezolvarea problemei. Astfel am putea ţine seamă succesiv de încărcările diferitelor bare, calculând pentru fiecare caz cantităţile static nedeterminate.

Tabloul de mai sus arată că este tot atât de simplu de a considera *concomitent* toate încărcările cadrului; pentru formarea termenilor liberi ai ecuaţiilor, nu avem decât să sumăm termenii corespunzători din ultimele 3 coloane ale tabloului, obţinând un singur termen, ce va reprezenta în ecuaţii efectul tuturor încărcărilor exterioare. Acest mod de a proceda apare logic dacă nu uităm că aceşti termeni liberi sunt rotirile θ_{is}; deci fie că vom considera succesiv rotirile în diferitele secţiuni i, sub acţiunea încărcărilor de pe fiecare bară în parte, fie că vom considera rotirile rezultante produse în diferitele secţiuni i de acţiunea concomitentă a încărcărilor de pe toate barele cadrului (obţinute prin sumarea algebrică a rotirilor parţiale), termenii liberi vor fi tot atât de simpli — reducându-se la o cifră — deci rezolvarea sistemului tot atât de uşoară.

Din structura sistemului de ecuaţii, sintetizată în tabloul de mai sus, se constată că prima şi a patra ecuaţie constitue relaţii de legătură între necunoscutele M_1 şi M_2 resp. M_3 şi M_4; ele permit eliminarea necunoscutelor M_1 şi M_4 din ecuaţiile 2 şi 3, astfel că rezolvarea problemei se reduce la un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute. Relaţiile 1 şi 4 reprezintă în sistemul de ecuaţii influenţa încastrărilor din reazemele 1 şi 4, aducând corecţiile necesare ecuaţiilor 2 şi 3; aceasta înseamnă că diferenţa de grad de nedeterminare, ce există între un cadru având încastrări în reazeme şi acelaş cadru având rezemări articulate, nu complică rezolvarea chestiunii, ecuaţiile corespunzătoare cantităţilor static nedeterminate din reazemele încastrate având numai un efect de corecţie asupra celorlalte ecuaţii, ele fiind relaţii de legătură între două necunoscute.

Tabloul permite ca, odată cu cadrul considerat, să se poată studia şi cazurile când acelaş cadru ar avea alte rezemări (articulaţii în loc de încastrări). Pentru aceasta va fi suficient să se anuleze în tablou toţi termenii ce reprezintă rotiri, având indici corespunzători rezemărilor ce nu mai sunt încastrări.

In toate cazurile problema se va reduce la rezolvarea unui sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, forma acestora putându-se deduce imediat din inspectarea tabloului. Astfel, pentru cadrul din fig. 9, vom avea:

a) *Incastrări în* 1 *şi* 4

art. 2 $(3\lambda_{12} + 4\lambda_{25}) M_2 + 4\lambda_{25} M_3 + 2 R_{2(1-5)} - R_{1(1-2)} = 0$

art. 3 $4\lambda_{25} M_2 + (4\lambda_{25} + 3\lambda_{43}) M_3 + 2R_{2(2-5)} + 2R_{3(4-3)} - R_{4(4-3)} = 0$

b) *Articulaţie în* 1 *şi încastrare în* 4

art. 2 $(2\lambda_{12} + \lambda_{25}) M_2 + 2\lambda_{25} M_3 + R_{2(1-5)} = 0$

art. 3 $4\lambda_{25} M_2 + (4\lambda_{25} + 3\lambda_{43}) M_3 + 2R_{2(2-5)} + 2R_{3(4-3)} - R_{4(4-3)} = 0$

c) *Incastrare în 1 şi articulaţie în 4*

art. 2 $(3\lambda_{12} + 4\lambda_{25})\, M_2 + 4\lambda_{25}\, M_3 + 2R_{2(1-5)} - R_{1(1-2)} = 0$

art. 3 $2\lambda_{25}\, M_2 + 2(\lambda_{25} + \lambda_{43})\, M_3 + R_{2(2-5)} + R_{3(4-3)} = 0$

d) *Articulaţii în 1 şi 4*

art. 2 $2(\lambda_{12} + \lambda_{25})\, M_2 + 2\lambda_{25}\, M_3 + R_{2(1-5)} = 0$

art. 3 $2\lambda_{25}\, M_2 + 2(\lambda_{25} + \lambda_{43})\, M_3 + R_{2(2-5)} + R_{3(4-3)} = 0$

Structura sistemelor de ecuaţii, date mai sus, este cât se poate de concludentă asupra influenţei naturii rezemărilor din 1 şi 4, cât şi a modului extrem de simplu cum aceasta poate fi operată în ecuaţii, cu ajutorul tabloului rezumativ.

Să examinăm acum cazul numeric din figura 9, unde sunt arătate toate încărcările cadrului. Admitem iniţial:

$$n_{12} = 1 \quad ; \quad n_{25} = 1{,}5 \quad ; \quad n_{43} = 2$$

deci:

$$\lambda_{12} = n_{12}\, l_{12} = 1.6 = 6 \text{ m} \quad ; \quad \lambda_{25} = n_{25}\, l_{25} = 1{,}5.4 = 6 \text{ m}$$

$$\text{şi } \lambda_{43} = n_{43}\, l_{43} = 2.5 = 10 \text{ m}.$$

Pentru încărcările date vom avea următoarele valori ale termenilor din ultimele trei coloane ale tabloului, ţinând seama de formulele date la pag. 260, fiecare din bare trebuind considerată în acest caz ca simplu rezemată.

$$R_{1(1-2)} = 6n_{12}\,.\,S_{21}/l_{12} = 6.1 \left[\frac{2\,.\,6^3}{24} + 9\,\frac{3{,}5\,.\,2{,}5}{6.6}(6 + 2{,}5)\right] = 220 \text{ tm}^2$$

$$R_{2(1-2)} = 6n_{12}.S_{12}/l_{12} = 6\,.\,1 \left[\frac{2\,.\,6^3}{24} + 9\,\frac{3{,}5\,.\,2{,}5}{6.6}(6 + 3{,}5)\right] = 233 \text{ tm}^2$$

$$R_{2(2-5)} = 6n_{25}.S_{52}/l_{25} = 6\,.\,1{,}5 \left[\frac{2\,.\,4^3}{24} + 4\,\frac{2{,}5\,.\,1{,}5}{6.4}(4 + 1{,}5)\right] = 79 \text{ tm}^2$$

$$R_{3(4-3)} = 6n_{43}\,.\,S_{43}/l_{43} = -\,6\,.\,2\,\frac{7\,.\,1}{6.5}(5^2 - 3\,.\,3^2) = 5{,}6 \text{ tm}^2$$

$$R_{4(4-3)} = 6n_{43}\,.\,S_{34}/l_{43} = +\,6\,.\,2\,\frac{7\,.\,1}{6.5}(5^2 - 3\,.\,2^2) = 36{,}4 \text{ tm}^2$$

La ultimele două relaţii, observăm că momentul dat de forţa de pe consolă este negativ, pentru convenţia de semne admisă.

Cu ajutorul acestor date numerice putem forma imediat oricare din grupele de ecuaţii a), b), c) sau d).

Să considerăm cadrul dat, cu încastrări în 1 şi 4, deci folosind ecuaţiile a) în care — introducând cifrele — obţinem:

$$42\, M_2 + 24\, M_3 + 404 = 0$$

$$24\, M_2 + 54\, M_3 + 132{,}8 = 0$$

care dau:

$$M_2 = -\,11 \; tm. \quad \text{şi} \quad M_3 = +\,2{,}43 \; tm.$$

Cu aceste valori, relaţiile cuprinse în rândurile 1 şi 4 ale tabloului ne vor da celelalte două necunoscute static nedeterminate. Aceste relaţii sunt:

art. 1 $2\lambda_{12}\, M_1 + \lambda_{12}\, M_2 + R_{1(1-2)} = 0$

art. 4 $\lambda_{43}\, M_3 + 2\lambda_{43}\, M_4 + R_{4(4-3)} = 0$

de unde:

$$M_1 = -\frac{M_2}{2} - \frac{R_{1(1-2)}}{2\lambda_{12}} = 11/2 - 220/12 = -12{,}83\ tm.$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{2} - \frac{R_{4(4-3)}}{2\lambda_{43}} = -2{,}43/2 - 36{,}4/20 = -3{,}04\ tm.$$

Cunoscând toate valorile cantităţilor static nedeterminate, se trasează diagrama definitivă a momentelor încovoetoare din cadru, arătată în fig. 9.

Solicitările axiale din bare sunt:

$$N_{12} = (-7 + M_4 - M_3)/5 = 2{,}49 \text{ t. compresiune}$$

$$N_{25} = 0$$

$$N_{43} = 2(3 + 2) + 9 \cdot 3{,}5/6 + 4 \cdot 1{,}5/4 + (M_1 - M_2)/6 - $$
$$- (M_2 + M_3)/4 = 18{,}58 \text{ tone compresiune,}$$

la care se adaugă 7 tone pe porţiunea inferioară a stâlpului 4-3.

Rezolvând celelalte trei sisteme de ecuaţii: b), c) şi d), pentru aceleaşi încărcări ale cadrului, se găsesc cantităţile static nedeterminate şi — pe baza acestora — diagramele de momente încovoetoare ale cadrului, pentru cazurile când una din rezemările 1 şi 4, sau amândouă, sunt articulaţii în loc de încastrări.

In tabloul de mai jos sunt indicate rezultatele calculului pentru cele patru cazuri de rezemări a), b), c) şi d), putându-se face aprecieri comparative, privind influenţa naturei rezemărilor asupra diagramei de momente încovoetoare a cadrului.

TABLOU COMPARATIV

Momentele în diferite secţiuni ale cadrului. Valori în tm.

Caz	Rezemări		M_1	M_2	M_3	M_4	M max		
	încast.	artic.					1—2	2—5	4—3
a.	1 şi 4	—	— 12,83	— 11	+ 2,43	— 3,04	+ 10,12	+ 4,29	+ 4,43
b.	4	1	0	— 22,30	+ 7,45	— 5,54	+ 9,09	+ 1,94	+ 6,46
c.	1	4	— 13,17	— 10,33	+ 1,23	0	+ 10,35	+ 4,08	+ 4,95
d.	—	1 şi 4	0	— 20,76	+ 5,14	0	+ 9,89	+ 1,69	+ 7,29

Inspectarea tabloului arată hotărâtoarea influenţă ce o are natura rezemării din 1 asupra diagramei de momente, în unele secţiuni valoarea acestora variind dela simplu la dublu; natura rezemării din 4 se resimte în special asupra diagramei de momente din bara 4-3.

4. *Cadru cu trei încastrări şi un reazem simplu.*

Construcţiunea este de 7 ori static nedeterminată; vom introduce deci 7 articulaţii spre a obţine sistemul static determinat de bază, pe care le distribuim astfel:

— câte o articulaţie în încastrările 1, 4 şi 7

— câte două articulaţii în nodurile interioare ale cadrului, în secţiunile 2 şi 3, resp. 5 şi 6.

Necunoscutele static nedeterminate vor fi: M_1, M_2, ... M_7. In fig. 10 se văd diagramele coeficienţilor de influenţă m_{x1}, m_{x2}, ... m_{x7}, reprezentând curbele de momente încovoetoare ce apar în sistemul static determinat, atunci când aplicăm succesiv — în articulaţiile introduse — momentele pozitive $M_1 = M_2 \ldots = M_7 = 1$ tm. De asemenea e dată diagrama M_s, care indică momentele ce se produc sub acţiunea sarcinilor exterioare; se vede că fiecare bară se comportă ca o grindă simplu rezemată, având diagramă de moment numai datorită sarcinilor ce calcă pe dânsa.

Grupul ecuațiilor de echilibru elastic va fi:

art. 1 $\theta_{11}M_1 + \theta_{12}M_2 + \ldots\ldots + \theta_{17}M_7 + \theta_{1s} = 0$

art. 2 $\theta_{21}M_1 + \theta_{22}M_2 + \ldots\ldots + \theta_{27}M_7 + \theta_{2s} = 0$

. . . .

art. 7 $\theta_{71}M_1 + \theta_{72}M_2 + \ldots\ldots + \theta_{77}M_7 + \theta_{7s} = 0$

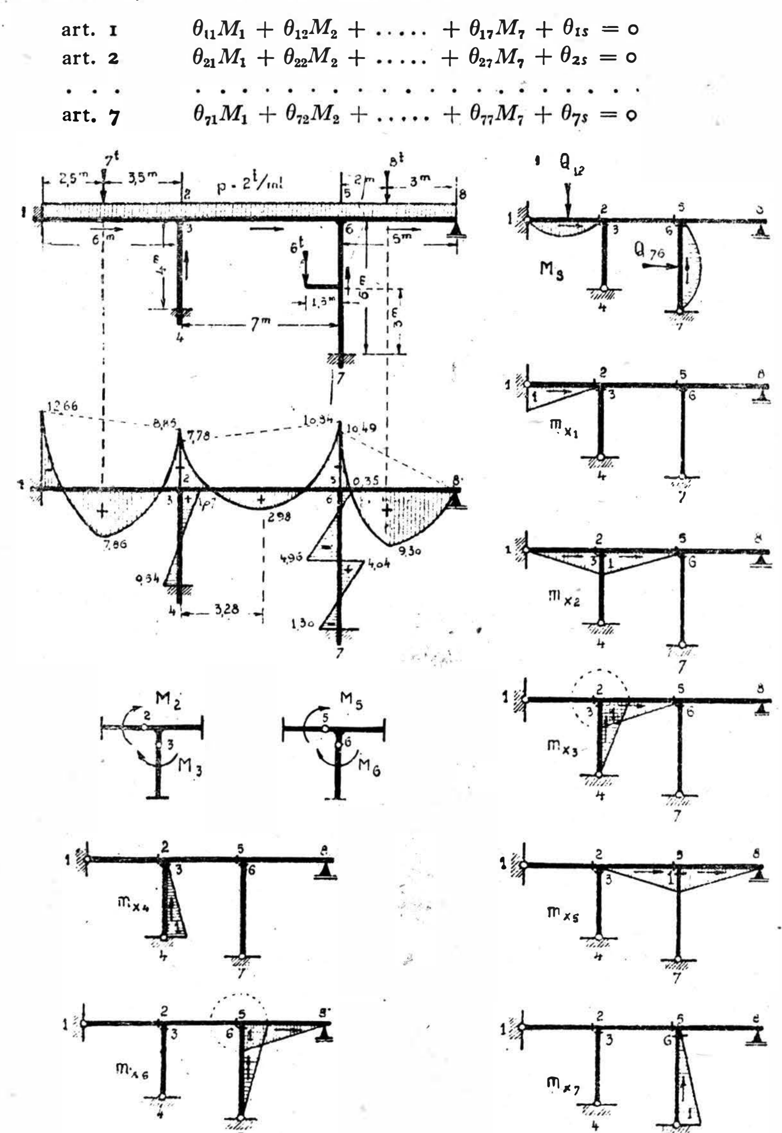


Fig. 10. — Cadru cu trei încastrări și un reazem simplu.

Ținând seama de expresiile rotirilor θ_{ii} și θ_{ik}, de diagramele coeficienților de influență m_{x1}, m_{x2}, ... m_{x7}, cât și de rezultatele tip de integrare, se obține direct tabloul coeficienților cantităților static nedeterminate din sistemul de ecuații.

Precizăm din nou că fiecare *rând* din tablou se referă la toate rotirile ce se produc în o aceiași secțiune *i*, unde s'a introdus o articulație; fiecare *coloană* din tablou

se referă la diferitele rotiri ce se produc în articulaţiile 1, 2 ... 7, sub acţiunea câte unuia din momentele-unitate. Astfel fiecare rând al tabloului reprezintă termenii uneia din ecuaţiile de echilibru elastic.

TABLOU

cuprinzând coeficienţii cantităţilor static nedeterminate

		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
Art.	θ_{ik}	θ_{i_1}	θ_{i_2}	θ_{i_3}	θ_{i_4}	θ_{i_5}	θ_{i_6}	θ_{i_7}
1	θ_{1k}	$2\lambda_{12}$	λ_{12}	—	—	—	—	—
2	θ_{2k}	λ_{12}	$2(\lambda_{12}+\lambda_{25})$	$2\lambda_{25}$	—	λ_{25}	—	—
3	θ_{3k}	—	$2\lambda_{25}$	$2(\lambda_{25}+\lambda_{43})$	λ_{43}	λ_{25}	—	—
4	θ_{4k}	—	—	λ_{43}	$2\lambda_{43}$	—	—	—
5	θ_{5k}	—	λ_{25}	λ_{25}	—	$2(\lambda_{25}+\lambda_{58})$	$2\lambda_{58}$	—
6	θ_{6k}	—	—	—	—	$2\lambda_{58}$	$2(\lambda_{58}+\lambda_{76})$	λ_{76}
7	θ_{7k}	—	—	—	—	—	λ_{76}	$2\lambda_{76}$

Inspectarea tabloului arată că din totalul de 49 coeficienţi ai necunoscutelor 28 sunt nuli, ceia ce aduce o considerabilă simplificare. Se mai constată că ecuaţiile 1, 4 şi 7 reprezintă în sistemul de ecuaţii influenţa încastrărilor din reazemele 1, 4 şi 7, fiecare din ele constituind o relaţie de legătură între două necunoscute; ele permit eliminarea necunoscutelor M_1, M_4 şi M_7 din celelalte 4 ecuaţii. Regăsim deci constatarea — care este generală în această organizare de calcul — că diferenţa de grad de nedeterminare a unui cadru, datorită naturei rezemărilor sale (încastrări sau articulaţii), nu aduce complicări în rezolvarea sistemului de ecuaţii, în toate cazurile chestiunea reducându-se la un sistem compus din acelaş număr de ecuaţii. Odată operată eliminarea necunoscutelor M_1, M_4 şi M_7, ecuaţia 6 rămâne numai cu 2 necunoscute, deci ea serveşte la eliminarea lui M_6 din ecuaţia 5, singura în care această necunoscută figurează. Vom avea de rezolvat în definitiv un sistem de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, deşi cadrul considerat este de 7 ori static nedeterminat.

Formarea tuturor sistemelor de ecuaţii corespunzătoare cadrului dat, având diferite moduri de rezemare în 1, 4 şi 7 (încastrări sau articulaţii), se obţine din tabloul găsit mai înainte, prin anularea termenilor ce conţin rotiri, având indici corespunzători cantităţilor static nedeterminate, ce nu mai figurează în problemă; astfel dacă în 4 ar fi dela început o articulaţie, se anulează toţi coeficienţii din rândul şi coloana 4-a.

In cazul când, la obţinerea sistemului static determinat, am fi introdus articulaţia 5 de cealaltă parte a nodului, ar fi survenit modificări în tablou, deoarece diagrama m_{x6} s'ar fi întins pe bara 2-5 în loc de 5-8, astfel că produsele de coeficienţi de influenţă s'ar fi format în alt mod, acolo unde intervenea m_{x6}.

Inspectarea diagramelor arată că, în acest caz, niciunul din coeficienţii existenţi în tablou nu s'ar fi anulat, în timp ce ar fi apărut valori pentru coeficienţii de forma $\theta_{26} = \theta_{62}$ şi $\theta_{36} = \theta_{63}$, astfel că totalul coeficienţilor nuli s'ar fi micşorat la 24; ţinând seama de ecuaţiile 1, 4 şi 7, s'ar fi ajuns la un sistem de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute. Se vede clar din aceasta că modul cum sunt plasate articulaţiile are influenţă asupra uşurinţei de rezolvare a problemei.

Organizarea calculului, cu diagramele coeficienţilor de influenţă şi tabloul termenilor ecuaţiilor, are şi avantajul că permite să ne dăm seama — din simpla privire a diagramelor — asupra modului celui mai potrivit de a introduce articulaţiile, spre o cât mai mare simplificare a calculului.

Formăm acum tabloul termenilor liberi ai ecuaţiilor, pentru încărcări oarecare pe diferitele bare, utilizând pentru aceasta diagramele M_s şi cele ale coeficienţilor de influenţă m_{x1}, m_{x2}, ... m_{x7}; fiecare bară se comportă ca grindă simplu rezemată, având suprafaţă de moment numai datorită încărcărilor ce o acţionează direct.

TABLOU *cuprinzând termenii liberi ai sistemului de ecuaţii, în diferite cazuri de încărcare a cadrului.*

		$M_{s(1-2)}$	$M_{s(2-5)}$	$M_{s(5-8)}$	$M_{s(4-3)}$	$M_{s(7-6)}$
Art.	θ_{is}	θ_{is}	θ_{is}	θ_{is}	θ_{is}	θ_{is}
1	θ_{1s}	$R_{1(1-2)}$	—	—	—	—
2	θ_{2s}	$R_{2(1-2)}$	$R_{2(2-5)}$	—	—	—
3	θ_{3s}	—	$R_{2(2-5)}$	—	$R_{3(4-3)}$	—
4	θ_{4s}	—	—	—	$R_{4(4-3)}$	—
5	θ_{5s}	—	$R_{5(2-5)}$	$R_{5(5-8)}$	—	—
6	θ_{6s}	—	—	$R_{5(5-8)}$	—	$R_{6(7-6)}$
7	θ_{7s}	—	—	—	—	$R_{7(7-6)}$

Vom considera acţiunea concomitentă a tuturor încărcărilor arătate în fig 10, formând termenii liberi ai ecuaţiilor prin sumarea algebrică a rotirilor parţiale θ_{is}, date în cele 5 coloane ale tabloului, corespunzătoare încărcărilor de pe cele cinci bare ale cadrului.

Trecând la aplicaţia numerică, să admitem:

$$n_{12} = n_{25} = n_{58} = 1 \quad \text{şi} \quad n_{43} = n_{76} = 2$$

vom avea:

$$\lambda_{12} = n_{12}\, l_{12} = 6 \text{ m} \; ; \; \lambda_{25} = n_{25}\, l_{25} = 7 \text{ m} \; ; \; \lambda_{58} = n_{58}\, l_{58} = 5 \text{ m}.$$

$$\lambda_{43} = n_{43}\, l_{43} = 8 \text{ m} \; ; \; \lambda_{76} = n_{76}\, l_{76} = 12 \text{ m}.$$

Pentru încărcările de pe bare se obţine, ţinând seamă de formulele dela pag. 260

$$R_{1(1-2)} = 6 n_{12} . S_{21}/l_{12} = 6.1 \left[\frac{2.6^3}{24} + 7\frac{2{,}5 \cdot 3{,}5}{6.6}(6+3{,}5)\right] = 205 \text{ tm}^2$$

$$R_{2(1-2)} = 6 n_{12} . S_{12}/l_{12} = 6.1 \left[\frac{2.6^3}{24} + 7\frac{2{,}5 \cdot 3{,}5}{6.6}(6+2{,}5)\right] = 195 \text{ tm}^2$$

$$R_{2(2-5)} = R_{5(2-5)} = 6 n_{25} . S_{52}/l_{25} = 6.1.2.7^3/24 = 172 \text{ tm}^2$$

$$R_{5(5-8)} = 6 n_{58} . S_{85}/l_{58} = 6.1 \left[\frac{2 \cdot 5^3}{24} + 8\frac{2.3}{6.5}(5+3)\right] = 139 \text{ tm}^2$$

$$R_{3(4-3)} = R_{4(4-3)} = 0$$

$$R_{6(7-6)} = 6 n_{76} . S_{76}/l_{76} = -6.2\frac{6.1{,}5}{6.6}(6^2\text{-}3.3^2) = -27 \text{ tm}^2$$

$$R_{7(7-6)} = 6 n_{76} . S_{67}/l_{76} = +6.2\frac{6.1{,}5}{6.6}(6^2\text{-}3.3^2) = +27 \text{ tm}^2$$

Cu aceste valori numerice se pot forma cele 7 ecuaţii de echilibru elastic, cuprinse în tablourile date.

Eliminând mai întâi necunoscutele M_1, M_4 şi M_7, cu ajutorul ecuaţiilor 1, 4 şi 7, obţinem forma următoare pentru ecuaţiile articulaţiilor 2, 3, 5 şi 6, corectate cu efectul încastrărilor din 1, 4 şi 7:

art. 2 $(3\lambda_{12} + 4\lambda_{25})M_2 + 4\lambda_{25} M_3 + 2\lambda_{25} M_5 + A = 0$
art. 3 $4\lambda_{25} M_2 + (4\lambda_{25} + 3\lambda_{43})M_3 + 2\lambda_{25} M_5 + B = 0$
art. 5 $\lambda_{25} M_2 + \lambda_{25} M_3 + 2(\lambda_{25} + \lambda_{58})M_5 + 2\lambda_{58} M_6 + C = 0$
art. 6 $4\lambda_{58} M_5 + (4\lambda_{58} + 3\lambda_{76})M_6 + D = 0$

unde:

$$A = 2\, R_{2(1-2-5)} - R_{1(1-2)} = 529 \text{ tm.}^2$$
$$B = 2\, R_{2(2-5)} + 2\, R_{3(4-3)} - R_{4(4-3)} = 344 \text{ tm.}^2$$
$$C = R_{5(2-5-8)} = 311 \text{ tm.}^2$$
$$D = 2\, R_{5(5-8)} + 2\, R_{6(7-6)} - R_{7(7-6)} = 197 \text{ tm.}^2$$

Este mai comod a înlocui valorile numerice λ_{ik}, înainte de a elimina pe M_6. Ecuaţiile devin:

art. 2 $46\, M_2 + 28\, M_3 + 14\, M_5 + 529 = 0$
art. 3 $28\, M_2 + 52\, M_3 + 14\, M_5 + 344 = 0$
art. 5 $7\, M_2 + 7\, M_3 + 24\, M_5 + 10\, M_6 + 311 = 0$
art. 6 $20\, M_5 + 56\, M_6 + 197 = 0$

Eliminând pe M_6, găsim sistemul definitiv de ecuaţii:

art. 2 $46\, M_2 + 28\, M_3 + 14\, M_5 + 529 = 0$
art. 3 $14\, M_2 + 26\, M_3 + 7\, M_5 + 172 = 0$
art. 5 $49\, M_2 + 49\, M_3 + 143\, M_5 + 1931 = 0$

care rezolvat dă valorile:

$$M_2 = -8{,}85 \; tm \;;\; M_3 = +1{,}07 \; tm \;;\; M_5 = -10{,}84 \; tm.$$

Cea de a patra ecuaţie, a articulaţiei 6, dă: $M_6 = +0{,}35$ *tm*.

Pentru găsirea necunoscutelor M_1, M_4 şi M_7, se utilizează ecuaţiile 1, 4 şi 7, date de tablou; acestea sunt:

art. 1 $2\lambda_{12} M_1 + \lambda_{12} M_2 + R_{1(1-2)} = 0$
art. 4 $\lambda_{43} M_3 + 2\lambda_{43} M_4 + R_{4(4-3)} = 0$
art. 7 $\lambda_{76} M_6 + 2\lambda_{76} M_7 + R_{7(7-6)} = 0$

unde, introducând valorile numerice:

$12\, M_1 + 6\, M_2 + 205 = 0$; $M_1 = -12{,}66$ *tm.*
$8\, M_3 + 16\, M_4 = 0$; $M_4 = -0{,}54$ *tm.*
$12\, M_6 + 24\, M_7 + 27 = 0$; $M_7 = -1{,}30$ *tm.*

Cu aceste valori s'a trasat diagrama definitivă a momentelor încovoetoare din cadru, aşa cum se vede în fig. 10.

Solicitările axiale din bare sunt:

$$N_{43} = 2\,(3 + 3{,}5) + 7.2{,}5/6 + (M_1 - M_2)/6 + (M_5 - M_2 - M_3)/7 = 15{,}18 \text{ t.}$$
$$N_{76} = 2\,(3{,}5 + 2{,}5) + 8.3/5 - (M_5 + M_6)/5 + (M_2 + M_3 - M_5)/7 = 19{,}34 \text{ t.}$$

la care se adaugă 6 t. pe porţiunea inferioară.

$N_{58} = 0$
$N_{25} = (-9 + M_7 - M_6)/6 = 1{,}77$ tone compresiune.
$N_{12} = 1{,}77 + (M_3 - M_4)/4 = 2{,}17$ tone compresiune.

C. *Cadre cu noduri deplasabile*

Din punct de vedere al liniei de calcul ce urmărim, nu are nici o importanță dacă nodurile cadrului sunt sau nu deplasabile de pe urma deformației. Ceia ce interesează sunt numai rotirile ce intervin, între cele două fețe ale secțiunii unde s'a întrodus o articulație, ecuațiile de echilibru elastic obținându-se tocmai prin condiția ca — după deformația cadrului — toate aceste deplasări să fie nule, exprimând astfel continuitatea barelor în punctele considerate, sau indeformabilitatea unghiurilor colțurilor de cadru.

Deplasările de ansamblu ale nodurilor (translații și rotiri), apărute în urma deformației generale a construcției, nu intervin direct în calculul ce urmărim, în toate cazurile urmând să se aplice acelaș procedeu. Vom remarca totuși că, la cadrele cu noduri deplasabile, calculul se amplifică în o oarecare măsură. In adevăr, atunci când un asemenea cadru se face static determinat, oricum am proceda la plasarea articulațiilor, va rămâne totdeauna nesuprimată cel puțin o încastrare interioară sau exterioară, fie că este vorba de menținerea uneia din încastrările din rezemări, fie că încastrarea dintre două bare rămâne în ființă. Acest lucru este necesar pentru a *ține* cadrul, altfel am avea o construcțiune static deformabilă, dat fiind că acest gen de cadre nu are stabilitate statică dacă în toate rezemările și nodurile sunt articulații.

In general, la cadrele etajate, se constată că este necesară menținerea unei încastrări pentru fiecare etaj, deci în majoritatea cazurilor numărul încastrărilor rămase va fi egal cu numărul etajelor. Drept consecință, în diagramele coeficienților de influență, cât și în diagramele de momente ale sistemului static determinat de bază supus încărcărilor exterioare, pe barele ce duc la încastrările menținute vor fi aproape în toate cazurile suprafețe de momente, ceia ce va face ca, la formarea sistemului ecuațiilor de echilibru elastic, să se anuleze mult mai puțin termeni. Tabloul coeficienților cantităților static nedeterminate va prezenta deci foarte puține *goluri*, ceia ce ar conduce — cel puțin la prima vedere — la situația de a rezolva un sistem compus din un număr de ecuații egal cu gradul de nedeterminare.

Dificultatea este numai aparentă, dat fiind că în toate cazurile se pot obține simplificări considerabile, observând că suprafețele de momente ce apar în barele conducând la încastrările menținute, sunt *aceleași* în aproape toate diagramele coeficienților de influență, variind numai semnele.

Deplasările de forma θ_{ik}, ce se vor obține prin integrarea produselor coeficienților de influență doi câte doi, vor prezenta în multe cazuri forme asemănătoare; vom putea deci totdeauna combina între ele ecuațiile scrise inițial, astfel ca să se obțină un nou tablou de coeficienți, cu un număr mult mai mare de *goluri*, având drept rezultat un sistem final de rezolvat constituit din puține ecuații.

Modul cum urmează a fi făcută combinarea ecuațiilor, este vizibil în chiar diagramele coeficienților de influență, în multe cazuri fiind

posibil de a scrie *direct* sistemul simplificat, fără a mai fi nevoie de constituirea tabloului inițial de coeficienți. Esențial este ca aceste combinări să fie *diferite*, spre a nu ajunge în situația ca sistemul simplificat să conțină unele ecuații, ce pot fi obținute din celelalte; *toate* ecuațiile inițiale trebue să participe la combinări.

Desigur aceasta constitue o operație în plus în mersul organizării de calcul, ea devenind mai delicată cu cât crește gradul de nedeterminare. Procedeul are avantajul că nu mărește numărul ecuațiilor și al necunoscutelor, rezolvarea fiind foarte simplă odată operația combinării îndeplinită. In capitolul următor vom arăta o modalitate de simplificare directă a sistemului de ecuații, prin întroducerea unui număr foarte restrâns de necunoscute suplimentare și a unor relații de legătură corespunzătoare. Rămâne ca, pentru diferite cazuri, să se examineze care este modul de calcul cel mai indicat.

In exemplul ce urmează vom proceda la fel ca la cadrele cu noduri fixe.

(Va urma)